

Листок 3, 26 февраля 2024 г.

**Задача 1.** Докажите, что  $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq S^1$ .

**Задача 2.** Докажите, что  $\mathbb{D}^n/S^{n-1} \simeq S^n$ .

**Задача 3.** Верно ли, что фактор хаусдорфова пространства является хаусдорфовым? Регулярного – регулярным? Нормального – нормальным?

**Задача 4.** Приведите пример хаусдорфова нерегулярного топологического пространства.

**Задача 5.** Приведите пример регулярного ненормального топологического пространства.

**Задача 6.** Приведите пример связного, но не линейно связного топологического пространства.

**Задача 7.** Определите естественную топологию на пространства невырожденных матриц  $GL(n, \mathbb{R})$ . Является ли оно связным?

**Задача 8.** Докажите, что функции расстояния

$$d_1(x, y) = \sum_i |x_i - y_i|, \quad d_2(x, y) = \left( \sum_i (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2} \quad d_\infty = \max_i (|x_i - y_i|)$$

задают структуру метрического пространства на  $\mathbb{R}^n$ . Нарисуйте открытые шары  $B_0^1$  в метриках  $d_i$  при  $n = 2$ .

**Задача 9.** Докажите, что топология на  $\mathbb{R}^n$ , индуцированная метриками  $d_i$  выше, совпадает с топологией произведения, определенной на лекции.

**Задача 10.** Пусть  $X, Y$  – метрические пространства. Определите естественную метрику на их произведении  $X \times Y$ .

**Задача 11.** Предположим, что в метрическом пространстве  $X$  выполнено  $B_x^{\epsilon_1} = B_y^{\epsilon_2}$  для некоторых точек  $x, y$  и некоторых  $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ . Верно ли, что  $x = y, \epsilon_1 = \epsilon_2$ ?

**Задача 12.** Определим топологию Зариского на  $\mathbb{C}^n$  следующим образом: замкнутыми множествами назовем множества нулей произвольного набора многочленов из  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ . Проверьте, что это действительно топология. Является ли она хаусдорфовой? Совпадает ли топология Зариского на  $\mathbb{C}^2$  с топологией произведения, полученной из топологии Зариского на  $\mathbb{C}$ ?