Листок 7, 1 апреля 2024 г.

Задача 1. Пусть X представляется в виде объединения своих замкнутых подмножеств $X = X_1 \cup \ldots \cup X_n$. Рассмотрим отображение $f\colon X \to Y$. Докажите, что если ограничение $f|_{X_i}$ непрерывно для любого i, то f непрерывно.

Задача 2. Докажите, что $\pi_1(X, x)$ является группой (то есть аккуратно проверьте выполнение групповых аксиом).

Задача 3. На лекции мы показали, что если X линейно связно, то корректно определена фундаментальная группа $\pi_1(X)$ (не зависящая от выбора точки на X). Пусть X, Y – линейно связные пространства. Докажите, что корректно определено индуцированное отображение $f_*\colon \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$.

Задача 4. Докажите, что если X стягиваемо, то $\pi_1(X) = 0$.

Задача 5. Существует ли ретракция ленты Мебиуса на границу?

Задача 6. Вычислите фундаментальную группу букета n окружностей.

Задача 7. Пусть связный граф имеет e ребер и v вершин. Вычислите его фундаментальную группу.

Задача 8. Пусть X, Y – поверхности, и пусть $f\colon X \to Y$ – накрытие. Как связаны эйлеровы характеристики $\chi(X)$ и $\chi(Y)$?

Задача 9. Пусть X, Y – поверхности с g_1 и g_2 ручками, соответственно, и пусть $f\colon X \to Y$ – накрытие. Как связаны g_1 и g_2 ?

Задача 10. Пусть X, Y – поверхности, и пусть $f\colon X \to Y$ – накрытие. Предположим, что Y ориентируема. Докажите, что X ориентируема. Верно ли, что если X ориентируема, то Y ориентируема?

Задача 11. Постройте универсальные накрытия:

1. n-мерного тора,
2. $\mathbb{R}P^2$,
3. ленты Мебиуса,
4. цилиндра,
5. букета двух окружностей,
6. букета окружности и двумерной сферы,
7. сферы с g ручками,
8. всех неориентируемых поверхностей.

Задача 12. Сформулируйте и докажите универсальное свойство универсального накрытия.

Задача 13. Можно ли накрыть $\mathbb{R}P^2$ плоскостью?

Задача 14. Постройте нерегулярное накрытие букета двух окружностей.

Задача 15. Постройте два регулярных накрытия букета двух окружностей так что они не будут гомотопически эквивалентны друг другу.