Листок 8, 8 апреля 2024 г.

Задача 1. Пусть $p\colon E \to B$ – накрытие. Докажите, что число точек в прообразе $p^{-1}(x)$ равно индексу подгруппы $p_*(\pi_1(E))$ в группе $\pi_1(B)$.

Задача 2. Докажите лемму о поднятии отображений. Пусть $p\colon E \to B$ – накрытие, и пусть $f\colon (X, x_0) \to (B, b)$ – отображение из линейно связного пространства X. Тогда существует не более одного поднятия f до отображения $\widetilde{f}\colon X \to E$ такого, что $p \circ \widetilde{f} = f$. Кроме того, существование поднятия эквивалентно условию $f_*(\pi_1(X, x_0)) \subset p_*(\pi_1(E, e))$.

Задача 3. Накрытие $p\colon E \to B$ называется регулярным, если $p_*(\pi_1(E, e))$ – нормальная подгруппа в $\pi_1(B, b)$. Докажите, что накрытие p регулярно тогда и только тогда, когда никакая петля на базе не является одновременно образом замкнутого пути и незамкнутого пути в E.

Задача 4. Докажите, что двулистные накрытия регулярны. Постройте пример нерегулярного трехлистного накрытия.

Задача 5. Докажите, что если накрытие регулярно, то существует свободное действие группы $G = \pi_1(B, b)/p_*(\pi_1(E, e))$ на E такое, что $E/G \simeq B$. Напомним, что действие группы называется *свободным*, если для любой точки x из $g \cdot x = x$ следует $g = e$.

Задача 6. Напомним, что действие группы G на топологическом пространстве X называется *дискретным*, если для любой точки x существует окрестность $x \in U$ такая, что множества $g \cdot U$, $g \in G$ не пересекаются. Докажите, что если G действует на X свободно и дискретно, то естественная проекция $p\colon X \to X/G$ является регулярным накрытием. Чему в этом случае изоморфно $\pi_1(X/G)/p_*(\pi_1(X))$?