Листок 9, 15 апреля 2024 г.

Задача 1. Рассмотрим векторное поле на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, заданное формулой $v(z) = z^n/|z^{n-1}|$, $v(z) = 0$. Найдите индекс этого векторного поля.

Задача 2. Докажите, что индекс замкнутой кривой γ по отношению к векторному полю v, заданному на плоскости, равен сумме особых точек векторного поля, лежащих в области, ограниченной γ.

Задача 3. Будем говорить, что векторное поле на плоскости *четно*, если $v(-x) = v(x)$ для любого x, и *нечетно*, если $v(-x) = -v(x)$ для любого x. Докажите, что индекс четного векторного поля четен, а нечетного – нечетен.

Задача 4. Пусть векторные поля на плоскости v и w таковы, что для любой точки x на некоторой кривой γ, имеем $v(x) \neq -w(x)$. Докажите, что индекс кривой γ по отношению к v и w равны.

Задача 5. Докажите основную теорему алгебры: полином положительной степени с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень.

Задача 6. Пусть f – дифференцируемая функция на плоскости. Рассмотрим векторное поле, заданное формулой $v = \mathrm{grad}(f)$.

1. Докажите, что индекс особой точки v может равняться $1, 0, -1, -2, \ldots$
2. (*) Докажите, что он не может равняться другому числу.

Задача 7. Постройте следующие векторные поля:

1. на торе, без особых точек;
2. на бутылке Клейна, без особых точек;
3. на сфере, с одной особой точкой;
4. на сфере с двумя ручками, с одной особой точкой;
5. на проективной плоскости, с одной особой точкой.

Задача 8. Существуют ли следующие векторные поля на проективной плоскости?

1. без особых точек;
2. с двумя общими особыми точками;
3. с тремя общими особыми точками;
4. с 17 общими особыми точками.

Задача 9. Рассмотрим сферу $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ и непрерывное векторное поле v, определенное на точках $x \in S^2$ и такое, что векторы $v(x)$ не обязательно являются касательными к сфере в точке x. Докажите, что тогда найдется точка $x \in S^2$ такая, что вектор $v(x)$ перпендикулярен касательной плоскости к сфере в точке x.

Задача 10. Пусть $f\colon S^2 \to S^2$ – непрерывное отображение. Докажите, что существует точка $x \in S^2$ такая, что $f(x) = \pm x$.