Листок 1.

Классическое вероятностное пространство

Задача 1. N человек принесли подарки друг для друга. Затем эти подарки сложили в мешок и наугад каждый вынул из мешка себе подарок. Какова вероятность того, что конкретный человек вынул подарок, который он принес? Какова вероятность того, что никто не вытащил подарок, который сам принес?

Задача 2. Сто мудрецов по одному заводят в комнату, в которой стоят сто закрытых коробок. В каждой коробке лежит табличка с именем одного из мудрецов. Все имена различны. Мудрец открывает 50 коробок одну за другой в произвольном порядке. Если в одной из открытых им коробок есть его имя, то он выживает, а если нет, то погибает. После каждого мудреца все коробки закрывают и оставшиеся мудрецы не знают о судьбе ушедших в комнату. Изначально мудрецы находятся все вместе и могут продумать план действий. Придумайте план, который гарантирует выживание всех мудрецов с вероятностью не менее 1/4.

Задача 3. В научном центре работают специалисты по 63-м различным направлениям естественных наук. Известно, что по каждому разделу в центре работает ровно 7 ученых, причем вполне может быть, что один ученый является специалистом сразу по нескольким направлениям. Все ученые должны принять участие в одной (и только одной) из двух конференций, одна из которых проходит в Москве, а другая в Новосибирске. Докажите, что всегда можно так распределить ученых по этим конференциям, что на каждой конференции будут присутствовать специалисты по всем 63-м направлениям.

Задача 4.

(a) Сколькими способами из n точек на прямой можно выбрать k точек так, что никакие две точки не являются соседними?

(b) Сколькими способами из n точек на окружности можно выбрать k точек так, что никакие две точки не являются соседними?

(c) За круглым столом рассаживаются n супружеских пар так, что мужчины и женщины чередуются. Какова вероятность, что супруги не сидят рядом?

Условная вероятность и независимые события

Задача 5. Колоду из 52 карт раздают на четверых игроков. Один из игроков объявляет, что у него есть туз. Какова вероятность, что у него есть еще хотя бы один туз? Какова вероятность, что у него есть еще хотя бы один туз, если он объявил, что у него есть туз пик?

Задача 6. В семье два ребенка, причем один из них мальчик. Какова вероятность того, что в семье два мальчика? Изменится ли вероятность, если известно, что один из детей – мальчик, родившийся в понедельник?

Задача 7. В коробке a белых и b черных шариков. Случайным образом извлекается шар. Этот шар возвращается обратно, затем добавляется еще c шаров одного с ним цвета. Найдите вероятность того, что при $n+m$ извлечениях появилось n белых и m черных шаров. Докажите, что вероятность извлечения белого шара на k-м шаге равна $a/(a+b)$.

Задача 8.

(a) События A, B, C попарно независимы и равновероятны, $A\cap B\cap C=\emptyset$. Найдите максимально возможное значение $P(A)$.

(b) Покажите, что для полной системы событий A, B и C (т. е. $P(A\cup B\cup C)=1$) условия предыдущего пункта не могут выполняться.

Задача 9. Пространство элементарных исходов Ω состоит из n элементов. Выясните, при каких k на Ω можно определить вероятностную меру P и выделить события $A_1, A_2, \ldots, A_k$ так, что эти события независимы в совокупности и $0<P(A_i)<1$ для всех $i=1,2,\ldots,k$.

Задача 10. Пусть $q>1/2$. Про три события A, B, C известно, что $P(A\cap B)\geq q$ и $P(A\cap C)\geq q$. Докажите, что $P(A|B\cap C)\geq q$.

Задача 11. (Лемма Ловаса) Пусть события $A_1,\ldots,A_n$ и число $d\in\{1,2,\ldots,n\}$ удовлетворяют следующим двум условиям: 1) для каждого события A_k найдутся события $A_{i_1},\ldots,A_{i_s}$ с $s\geq n-d$ такие, что A_k независимо со всеми пересечениями этих событий, 2) для каждого k верно неравенство $P(A_k)\geq 1-\frac{1}{e(d+1)}$. Докажите, что $P(\cap_k A_k)>0$.

Задача 12. В научном центре работают специалисты по различным направлениям естественных наук (число направлений мы не знаем). По каждому направлению в центре работает ровно 7 ученых, причем вполне может быть, что один ученый является специалистом сразу по нескольким направлениям, но не больше трех. Докажите, что всегда можно так распределить всех ученых центра по двум одновременно проходящим конференциям, что на каждой будут присутствовать специалисты по всем направлениям (и каждый будет участвовать лишь в одной конференции).

Формула полной вероятности и формула Байеса

Задача 13. Имеется 10 коробок, в каждой из которых лежит a белых и b черных шаров. Из первой коробки выбирается случайным образом шар и перекладывается во вторую коробку, затем из второй коробки извлекается один шар и перекладывается в третью и т. д. Наконец из последней коробки извлекается один шар. Какова вероятность, что этот шар белый?

Задача 14. На посадку в самолет стоят $N \geq 2$ пассажиров, среди которых сумасшедшая старушка. Старушка расталкивает всех пассажиров и садится в самолет на произвольное место. Затем пассажиры, когда заходят в самолет, садятся на свое место, если оно свободно, и на произвольное свободное место в противном случае. Какова вероятность того, что последний пассажир сядет на свое место?

Задача 15. (Парадокс Байеса) Пусть имеется тест, используемый для диагностики некоторого заболевания. Известно, что доля больных этим заболеванием равна $0,001$. Если человек болен, то тест дает положительный результат с вероятностью $0,9$. Если человек здоров, то тест дает положительный результат с вероятностью $0,01$. Известно, что тест оказался положительным. Какова вероятность того, что человек на самом деле здоров?

Задача 16. (Парадокс Монти Холла) Вы участвуете в игре, в которой вам нужно выбрать одну из трёх дверей. За одной из дверей спрятан автомобиль, за двумя другими — козы. Вы выбираете одну из дверей (например 1-ую) после этого ведущий, который знает, где находится автомобиль, открывает одну из оставшихся дверей (например 3-ю) за которой находится коза. После этого ведущий предлагает вам изменить свой выбор и выбрать дверь номер 2. Увеличатся ли ваши шансы выиграть автомобиль, если вы примете предложение ведущего и измените свой выбор?

Схема Бернулли

Задача 17. Алиса и Боб бросают монету n раз. Какова вероятность, что у Алисы выпало больше орлов чем у Боба? Каков будет ответ, если Алиса $n+1$ раз бросила монету?

Задача 18. Алиса и Боб бросают 100 раз правильную монету (каждый свою). Затем Алиса называет число a от 1 до 100, а Боб называет число b от 1 до 100. Какова вероятность, что результат a-го бросания у Боба совпадает с результатом b-го бросания у Алисы, если числа a и b выбираются случайно? Придумайте алгоритм выбора чисел a и b, при котором вероятность совпадения больше $1/2$.

Задача 19. N раз происходит двойное бросание монеты с вероятностью выпадения орла p. Найдите вероятность того, что комбинация ОР появится раньше РО. Как изменится вероятность, если бросаем не N раз, а до первого появления РО или ОР?

Задача 20. Игрок выбирает «герб» или «решетку», после чего бросается монета. Если выпадает та сторона монеты, которая была названа игроком, то он выигрывает, получая, скажем 1 рубль; в противном случае он столько же проигрывает. Начальный капитал составляет x рублей и игрок ставит себе целью довести его до некоторой суммы a. Игра продолжается до тех пор, пока либо игрок наберет заранее определенную сумму a, либо разорится. Какова вероятность того, что в конце концов игрок разорится, так и не набрав желаемую сумму a рублей? Разберите два случая: правильная монета и произвольная с вероятностью герба p.