Листок 3.

Распределение случайных величин

Задача 1. Студент готовится к экзамену следующим образом. В начале каждого часа он подбрасывает монету. Если выпадает орел, то он наудачу выбирает число x из отрезка $[0,1]$ такую часть времени в течении данного часа тратит на подготовку, а остальное время отдыхает. Если выпадает решка, то студент половину часа отдыхает, а остальную половину готовится. Случайная величина ξ – время, затраченное студентом на подготовку. Найдите функцию распределения случайной величины ξ и нарисуйте ее график.

Задача 2. Функции распределения F_1 и F_2 удовлетворяют неравенству $F_1 \leq F_2$. Докажите, что можно построить такое вероятностное пространство и такие случайные величины ξ_1 и ξ_2 с функциями распределения F_1 и F_2, что $P(\xi_1 \geq \xi_2) = 1$.

Задача 3. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — диффеоморфизм. Предположим, что распределение случайной величины ξ имеет плотность ϱ. Найдите плотность распределения величины $f(\xi)$. Приведите пример таких гомеоморфизма $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и случайной величины ξ, распределение которой имеет плотность, что у распределения случайной величины $f(\xi)$ плотности нет.

Задача 4.

(a) Пусть τ_1 – число бросаний до первого успеха в схеме Бернулли с вероятностью успеха p. Пусть τ_2 – число бросаний после первого успеха до появления второго успеха. Найдите совместное распределение случайных величин τ_1 и τ_2.

(b) Игральная кость бросается до тех пор, пока не выпадет меньше пяти очков. Пусть ξ – число очков, выпавших при последнем бросании, а η – число бросаний. Найдите совместное распределение ξ и η.

Задача 5. Пространство исходов Ω состоит из пяти элементов, каждый из которых имеет положительную вероятность. Существуют ли на Ω две независимые случайные величины, каждая из которых принимает пять различных значений?

Задача 6. Докажите, что из независимости ξ и $f(\xi)$ следует, что $f(\xi) = const$ почти наверное.

Задача 7. Существуют ли независимые случайные величины X и Y такие, что каждая из них не является константой с вероятностью единица и $X^2 + Y^2 \equiv 1$?

Задача 8.

(a) Пусть случайная величина ξ имеет равномерное распределение на $[0,1]$. Через ξ_n обозначим n-ю цифру двоичной записи ξ. Докажите, что $P(\xi_n = 0) = P(\xi_n = 1) = \frac{1}{2}$ и ξ_n — последовательность независимых случайных величин.

(b) Пусть ξ_n — последовательность независимых случайных величин, причем $P(\xi_n = 1) = 1 - P(\xi_n = 0) = p$. Докажите, что при $p = \frac{1}{2}$ величина $\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n 2^{-n}$ имеет равномерное распределение на $[0,1]$. Проверьте, что при $p \neq \frac{1}{2}$ и $0 < p < 1$ величина ξ имеет непрерывную функцию распределения, но не имеет плотности распределения.

Задача 9. (Закон 0 и 1 Хьюитта и Сэвиджа) Множество $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$ назовем перестановочным, если для всякой перестановки π натурального ряда, переставляющей лишь конечно число элементов, верно равенство $\{(x_n)\colon (x_{\pi(n)}) \in B\} = B$. Докажите, что для всякой меры $P = \otimes_n \mu$, где μ — вероятностная борелевская мера, $P(B) = 0$ или $P(B) = 1$. Переформулируйте это утверждение в терминах последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин.

Задача 10. Какие из следующих множеств перестановочные: (a) $\{(x_n)\colon \lim_{n\to\infty} x_n = a\}$, (b) $\{(x_n)\colon x_{2024} \leq 1\}$, (c) $\{(x_n)\colon \sum_{n=1}^{N} x_n = 0$ для бесконечного числа номеров $N\}$?

Математическое ожидание

Задача 11. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ, имеющей распределение:

(a) $P(\xi = k) = C_N^k p^k q^{N-k}$, $0 \leq q = 1 - p \leq 1$, $0 \leq k \leq N$,

(b) $P(\xi = k) = q^{k-1} p$, $0 \leq q = 1 - p \leq 1$, $1 \leq k$,

(c) $P(\xi = k) = \lambda^k e^{-\lambda}/k!$, $0 < \lambda$, $0 \leq k$,

(d) $P(\xi = m) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$, где $M \le N$, $n \le N$, $0 \le m \le \min\{M, n\}$ (случайная величина ξ равна количеству вытащенных белых шаров, когда из ящика без возвращения вынимают n шаров, а в ящике N шаров, из которых M белых).

Задача 12. (a) Бросают сто игральных костей. Найдите математическое ожидание и дисперсию суммы выпавших очков.

(b) Сто писем разложили по ста конвертам, на которых уже были написаны адреса, случайным образом. Найдите математическое ожидание количества писем, лежащих в конвертах с правильными адресами.

(c) Случайный граф получается удалением ребер из полного графа на n вершинах, причем вероятность удаления ребра равна $q = 1-p$ и ребра удаляются независимо друг от друга. Случайная величина ξ – число треугольников в графе. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ.

Задача 13. (a) Пусть задана последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин ξ_n, имеющих геометрическое распределение, т. е. $P(\xi_n = k) = pq^{k-1}$, $q = 1-p$. Найдите распределение случайных величин $\tau = \min\{n \ge 1\colon \xi_n > 1\}$ и ξ_τ, вычислите $\mathbb{E}\tau$, $\mathbb{E}\xi_\tau$.

(b) Пусть задана последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин ξ_n, имеющих распределение Пуассона с параметром 1. Найдите распределение случайных величин $\tau = \min\{n \ge 1\colon \xi_n > 1\}$ и ξ_τ, вычислите $\mathbb{E}\tau$, $\mathbb{E}\xi_\tau$.

Задача 14. Вводя подходящее вероятностное пространство и используя линейность и монотонность математического ожидания, решите следующие задачи.

(a) В каждой клетке шахматной доски стоит плюс или минус, причем число плюсов равно числу минусов. Докажите, что можно так расставить восемь ладей, что они не бьют друг-друга и не менее четырех из них стоят на плюсах.

(b) Окружность покрасили в два цвета – красный и синий, причем длина множества красных точек не меньше 2/3 длины окружности. Докажите, что в окружность можно вписать квадрат так, что у него будет хотя бы три красные вершины.

(c) На белой сфере есть черное пятно, занимающее не более 1/10 ее поверхности. Докажите, что в сферу можно вписать куб так, что все его вершины будут белыми.

(d) Пусть $v_1, \ldots, v_n$ – вектора единичной длины в $\mathbb{R}^n$. Докажите, что найдутся такие числа $\alpha_i = \pm 1$, что $\|\alpha_1 v_1 + \ldots \alpha_n v_n\| \le \sqrt{n}$.

Задача 15. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины, функция распределения которой — функция Кантора.

Задача 16. Найдите математическое ожидание и дисперсию ξ, $\xi + \eta$, $\max\{\xi, \eta\}$, если вектор (ξ, η) имеет равномерное распределение на

(a) $[0,1]^2$, (b) $\{(x,y)\colon\ 0 < y < 1-x\}$, (c) $\{(x,y)\colon\ x^2 + y^2 \le 1\}$.

Задача 17.

(a) Найдите математическое ожидание и дисперсию $\xi + \eta$, $\sin(\xi\eta)$, $\max\{\xi, \eta\}$, если ξ имеет равномерное распределение на $[0,1]$, η имеет биномиальное распределение с параметрами n и p и эти величины независимые.

(b) Пусть ξ_1 имеет нормальное распределение с параметрами 0 и 1, ξ_2 имеет равномерное распределение на $[0,1]$, а величина η такова, что $p = P(\eta = 1) = 1 - P(\eta = 2)$ и η независимы с ξ_1 и ξ_2. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ_η.

Задача 18. Точки $A_1, \ldots, A_n$ независимы и имеют равномерное распределение в единичном круге B. Случайное множество Q состоит из тех точек круга B, которые находятся ближе к центру круга, чем к его границе и к любой из точек A_i. Найдите математическое ожидание площади множества Q.

Задача 19. Пусть $|\xi| \le 1$. Найдите максимально возможное значение $\mathbb{D}\xi$.

Задача 20. Правомерно ли утверждение: «От метро до университета 1 км, хожу я в среднем со скоростью 5 км/час, следовательно, в среднем на дорогу у меня уходит 12 минут»? Станет ли утверждение верным, если сказать, что на дорогу уходит не менее 12 минут?