НМУ, II курс, 05.04.2024

Листок 4.

Характеристическая функция

Задача 1. Найдите характеристическую функцию для случайной величины ξ, имеющей

(a) распределение Бернулли с вероятностью успеха p и числом испытаний n, (b) геометрическое распределение с вероятностью успеха p, (c) имеющей распределение Пуассона с параметром λ. (d) равномерное распределение на отрезке $[0,1]$, (e) показательное распределение с параметром λ

Задача 2. (a) Пусть случайная величина ξ принимает целочисленные значения и задана ее характеристическая функция φ_ξ. Выразите вероятность события « ξ делится на 2 » через функцию φ_ξ.

(b) Пусть ξ_n – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих целые значения. Известно, что вероятность события « ξ_1 делится на 2» больше нуля и меньше единицы. Пусть $\eta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Докажите, что $\lim_{n\to\infty} P(\eta_n \text{ делится на } 2) = \frac{1}{2}$.

Задача 3. Объясните почему следующие функции не являются характеристическими:

(a) $\varphi(y) = \sin y$, (b) $\varphi(y) = 2 - \cos y$, (c) $\varphi(y) = e^{-y^4}$, (d) $\varphi(y) = e^{iy^2}$.

Задача 4. Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_M$ — характеристические функции, $c_k \geq 0$ и $c_1 + \ldots + c_M = 1$. Докажите, что $c_1\varphi_1 + \ldots + c_M\varphi_M$ является характеристической функцией.

Задача 5. Пусть величина ζ имеет стандартное нормальное распределение и независима с величинами ξ и η. Предположим, что распределения величин $\zeta + \xi$ и $\zeta + \eta$ равны. Докажите, что величины ξ и η имеют одинаковые распределения.

Нормальное распределение

Запись $\xi \sim N(0,1)$ означает, что ξ имеет нормальное распределение со средним 0 и дисперсией 1, то есть ξ имеет стандартное нормальное распределение.

Задача 6. (a) Пусть величины $\xi, \eta \sim N(0,1)$ и независимы. Доказать, что для всякого α верно $\xi\cos\alpha + \eta\sin\alpha \sim N(0,1)$.

(b) Пусть величины $\xi, \eta \sim N(0,1)$, α имеет равномерное распределение на $[0, 2\pi]$ и ξ, η, α независимы. Доказать, что $\xi\cos\alpha + \eta\sin\alpha \sim N(0,1)$.

(c) Пусть величины ξ, η, $\zeta \sim N(0,1)$ и независимы. Докажите, что $\frac{\xi+\zeta\eta}{\sqrt{1+\zeta^2}} \sim N(0,1)$.

Задача 7. Пусть (ξ, η) равномерно распределен на $[0,1]\times[0,1]$. Докажите, что (X, Y), где

$$X = \sqrt{-2\ln\xi}\cos(2\pi\eta), \quad Y = \sqrt{-2\ln\xi}\sin(2\pi\eta),$$

имеет нормальное распределение с плотностью $\frac{1}{2\pi}e^{-(x^2+y^2)/2}$.

Задача 8. Пусть $\xi \sim N(0,1)$ и $\eta_\alpha = \xi$ при $|\xi| \leq \alpha$, $\eta_\alpha = -\xi$ при $|\xi| > \alpha$. Докажите, что $\eta_\alpha \sim N(0,1)$ и при α таком, что $\displaystyle\int_0^\alpha x^2(2\pi)^{-1/2}e^{-x^2/2}\,dx = \frac{1}{4}$, величины ξ и η_α некоррелированы, но зависимы.

Задача 9. Вектор (ξ, η) имеет нормальное распределение с нулевым вектором математических ожиданий и невырожденной матрицей ковариации $(q_{ij})_{1\leq i,j\leq 2}$. Найдите $P((\xi,\eta)\in\Pi_i)$, где Π_i – i-я координатная четверть.

Задача 10. (a) Пусть (ξ, η) имеет нормальное распределение с нулевым вектором математических ожиданий и с матрицей ковариаций $(q_{ij})_{1\leq i,j\leq 2}$. Найдите числа c_{ij} и независимые случайные величины e_1 и e_2, имеющие распределение $N(0,1)$ такие, что $\xi = c_{11}e_1 + c_{12}e_2$ и $\eta = c_{21}e_1 + c_{22}e_2$.

(b) Пусть случайный вектор ξ имеет нормальное распределение с нулевым вектором средних и матрицей ковариаций

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b1) Найдите такую матрицу A, что $\xi = A\eta$, где $\eta = (\eta_1, \eta_2)$, $\eta_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ и независимы;

(b2) Найдите $\mathbb{E}\xi_1^2\xi_2^2$;

(b3) Найдите плотность случайного вектора $(2\xi_1, \xi_1 + \xi_2)$.

Задача 11. Пусть $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ – независимые нормально распределенные с параметрами μ и σ^2 случайные величины. Положим

$$\overline{\xi} = \frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n}, \quad \zeta = (\xi_1 - \overline{\xi})^2 + \ldots + (\xi_n - \overline{\xi})^2$$

Докажите, что $\overline{\xi}$ и ζ независимы. Найдите распределение величин $\overline{\xi}$, и $\sigma^{-2}\zeta$ (распределение «хи квардрат»).

Закон больших чисел

Задача 12. Докажите, что для всякой случайной величины ξ с конечной дисперсией верна оценка

$$P\Big(-3 < \frac{\xi - \mathbb{E}\xi}{\sqrt{\mathbb{D}\xi}} < 3\Big) > 0.88.$$

Оцените эту вероятность в случае, когда ξ имеет нормальное распределение.

Задача 13. Пусть ξ_n – последовательность независимых и одинаково распределенных положительных случайных величин. Докажите, что для всякого $C > 0$ найдутся $\alpha, \beta > 0$ такие, что $P(\xi_1 + \ldots + \xi_n \le C) \le e^{-\alpha n + \beta}$.

Задача 14. Пусть S_n – число успехов в n бросаниях правильной монеты. Докажите неравенство Чернова

$$P\Big(\Big|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\Big| \ge \delta\Big) \le 2e^{-2n\delta^2}.$$

Задача 15. Случайные величины ξ_n независимы и $P(\xi_n = 2^n) = P(\xi_n = -2^n) = 1/2$. Выполняется ли для этой последовательности закон больших чисел?

Задача 16. (a) Пусть ξ_n – последовательность независимых одинаково распределенных невырожденных положительных величин с $\mathbb{E}\xi_n = 1$. Докажите, что $\Pi_{n=1}^{N}\xi_n$ стремится к нулю почти наверное при $N \to \infty$.

(b) Пусть ξ_n – последовательность независимых величин, причем $\xi_n \in N(0,1)$. Докажите, что почти наверное $\sum_n \frac{\xi_n^2}{n} = +\infty$.

Центральная предельная теорема

Задача 17. Найдите характеристическую функцию случайной величины ξ, имеющей распределение Коши $\varrho(x) = \pi^{-1}(1+x^2)^{-1}$. Найдите к чему сходится по распределению последовательность случайных величин $(\xi_1 + \ldots + \xi_n)/\sqrt{n}$, где ξ_n независимы и имеют распределение Коши.

Задача 18. Пусть ξ_n независимы и одинаково распределены с $\mathbb{E}\xi_n = 0$ и $\mathbb{D}\xi_n = 1/3$. Положим $\eta_k = \xi_k + \xi_{k+1} + \xi_{k+2}$. Найдите $\mathbb{E}\eta_k$, $\mathbb{D}\eta_k$, $cov(\eta_k, \eta_m)$ и предел

$$\lim_{n\to+\infty} P\Big(\frac{\eta_1 + \ldots + \eta_n}{\sqrt{n}} \le x\Big).$$

Объясните почему для η_n не работает центральная предельная теорема.

Задача 19. Пусть ξ имеет распределение Пуассона с параметром λ. Найдите предел

$$\lim_{\lambda\to+\infty} P\Big(\frac{\xi - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \le t\Big).$$

Задача 20. Пусть ξ_n – последовательность независимых одинаково распределенных величин с функцией распределения $F(x)$. Найдите распределение случайной величины

$$M_n = \max\{\xi_1, \dots, \xi_n\}.$$

Предположим, что $\lim_{x\to+\infty} x^a(1-F(x)) = b$, где $a > 0$ и $b > 0$. Докажите, что последовательность $M_n/(bn)^{1/a}$ сходится по распределению к случайной величине, имеющей функцию распределения $f(x) = e^{-x^{-a}}$ при $x > 0$ и $f(x) = 0$ при $x \le 0$.