Нормальные формы линейных операторов. Функции от линейных операторов.

Задача 1. а) Докажите, что произвольное семейство коммутирующих операторов над алгебраически замкнутым полем имеет общий собственный вектор.

б) Докажите, что произвольное семейство коммутирующих диагонализуемых операторов может быть одновременно диагонализованно в некотором базисе.

в) Докажите, что ограничение диагонализируемого оператора на подпространство диагонализиуемо.

г) Пусть поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто характеристики 0. Докажите, что если $A^k = E$, то матрица A – диагонализуема. Приведите контрпример для случая алгебраически замкнутого поля характеристики p/не алгебраически замкнутого поля характеристики 0.

д) Пусть $A \in M_n(\mathbb{C})$ – матрица с числами $a_1, \dots, a_n$ на побочной диагонали и нулями в остальных местах. Укажите необходимые и достаточные условия того, что матрица A – диагонализируема.

е) Докажите, что множество диагонализируемых матриц плотно в $M_n(\mathbb{C})$.

ж) Верно ли аналогичное утверждение для $M_n(\mathbb{R})$? А для полупростых матриц (см. 2г)?

Задача 2. (Разложение Жордана) Пусть $\Bbbk$ – алгебраически замкнутое поле.
а) Докажите, что для любой матрицы $A \in M_n(\Bbbk)$ существуют единственные A_s – диагонализируемая и A_n – нильпотентная такие, что $A = A_s + A_n$. Более того, существуют $p, q \in \Bbbk[t]$ без свободного члена такие, что $p(A) = A_s, q(A) = A_n$.

б) Докажите, что для любого элемента $A \in GL_n(\Bbbk)$ существуют единственные A_s – диагонализируемая и A_n – унипотентная (т.е. $E - A_n$ – нильпотентна) такие, что $A = A_s A_n$.

в) Докажите, что для коммутирующих линейных операторов $AB = BA$ верно, что

$$(A + B)_s = A_s + B_s, (A + B)_n = A_n + B_n.$$

Верно ли аналогичное утверждение для мультипликативного разложения?

г) Будем называть матрицу из $M_n(\mathbb{R})$ полупростой, если она диагонализуема над $\mathbb{C}$. Докажите существование и единственность разложения Жордана для матриц из $M_n(\mathbb{R})$ и $GL_n(\mathbb{R})$.

Задача 3. Докажите, что если матрица B коммутирует с любой матрицей, коммутирующей с A, то B является многочленом от A.

Задача 4. Пусть $A \in M_n(\Bbbk)$. Рассмотрим матрицу $xE - A \in M_n(\Bbbk[x])$.
а) Докажите, что инвариантные множители матрицы $xE - A$ это в точности многочлены блоков Фробениусовой нормальной формы (ФНФ) матрицы A.

б) Рассмотрим матрицу $xE - A$ и приведём её элементарными преобразованиями к диагональному виду с инвариантными факторами $f_1(x), \dots, f_m(x)$ степеней $d_1, \dots, d_k$. Каждому преобразованию *строк* матрицы $xE - A$ сопоставим преобразование столбцов матрицы E следующим образом:

- Замена i-ой и j-ой строк соответствует замене i-ого и j-ого столбцов.
- Прибавление к i-ой строке j-ой умноженной на $p(x)$ соответствует вычитанию $p(A)$ умноженной на i-ый столбец из j-ого столбца.
- Домножение i-ой строки на $u \in \Bbbk^\times$ соответствует домножению i-ого столбца на u^{-1}.

В результате получится матрица, у которой первые $n - m$ столбцов – нулевые, а оставшиеся $v_1, \dots, v_m$ – ненулевые. Пусть P матрица, столбцы которой

$$v_1, Av_1, \dots, A^{d_1-1}v_1, v_2, Av_2, \dots, A^{d_2-1}v_2, \dots, v_m, Av_m, \dots, A^{d_m-1}v_m$$

Тогда $P^{-1}AP$ – это ФНФ матрицы A.

в) Найдите ФНФ матрицы и матрицу перехода для матрицы из $M_n(\mathbb{Q})$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Задача 5. а) Объясните следующий алгоритм получения Жордановой нормальной формы (ЖНФ).

- Найти инвариантные факторы матрицы A.

- Разложить i-ый инвариантный фактор $f_i(x) = (x-\lambda_1)^{\alpha_1} \dots (x-\lambda_s)^{\alpha_s}, \sum \alpha_i = d_i$ на множители.
- Пусть $v_1, \dots, v_m$ – ненулевые столбцы матрицы из алгоритма для нахождения ФНФ. Пусть матрица P это матрица со столбцами

$$\begin{gathered}
(A-\lambda_1 E)^{\alpha_1 - 1}(A-\lambda_2 E)^{\alpha_2} \dots (A-\lambda_s E)^{\alpha_s} v_1 \\
(A-\lambda_1 E)^{\alpha_1 - 2}(A-\lambda_2 E)^{\alpha_2} \dots (A-\lambda_s E)^{\alpha_s} v_1 \\
\dots \\
(A-\lambda_1 E)^{0}(A-\lambda_2 E)^{\alpha_2} \dots (A-\lambda_s E)^{\alpha_s} v_1 \\
(A-\lambda_1 E)^{\alpha_1}(A-\lambda_2 E)^{\alpha_2 - 1} \dots (A-\lambda_s E)^{\alpha_s} v_1 \\
\dots
\end{gathered}$$

Тогда $P^{-1}AP$ – это ЖНФ матрицы A.

б) Найдите ЖНФ матрицы из $M_n(\mathbb{C})$ и матрицу перехода $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 5 \\ -4 & 0 & -3 \\ -6 & -4 & -2 \end{pmatrix}$.

в) Найдите ЖНФ $J_n(\lambda)^k$, где $J_n(\lambda)$ – жорданова клетка размера $n \times n$ с λ на диагонали.

Задача 6. Найдите вещественную Жорданову форму матрицы из $M_n(\mathbb{R})$ и соответствующую матрицу перехода: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Задача 7. а) Докажите, что характеристический и минимальный многочлены подобных матриц равны.
б) Докажите, что матрицы 2×2 и 3×3 подобны тогда и только тогда когда их характеристический и минимальный многочлены совпадают.
в) Верно ли утверждение предыдущего пункта для матриц $n \times n, n \geq 4$?

Задача 8. Объясните, как зная ФНФ получить ЖНФ матрицы $A \in M_n(\mathbb{C})$ и наоборот.

Задача 9. Классифицируйте с точностью до подобия все 2×2 матрицы с коэффициентами в поле **а)** $\mathbb{F}_2$; **б)** $\mathbb{F}_3$.
Задача 10. а) Вычислите $f(J_n(\lambda))$, где f – произвольная аналитическая функция;
б) $A^n, \sin A, \cos A, e^A$ для матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$;
в) То же самое для матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.
Задача 11. а) Докажите, что $\frac{d}{dt}\exp(At) = A\exp(At)$ для любого $t \in \mathbb{R}$ (и объясните, что означает производная матрицы).
б) Пусть $y_1, \dots, y_4$ – дифференцируемые в окрестности нуля функции. Решите систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1 + 2y_2 - 4y_3 + 4y_4 \\ \dot{y}_2 = 2y_1 - y_2 + 4y_3 - 8y_4 \\ \dot{y}_3 = y_1 + y_3 - 2y_4 \\ \dot{y}_4 = y_2 - 2y_3 + 3y_4 \end{cases}$$

$(y_1(0), y_2(0), y_3(0), y_4(0)) = (0, 0, 0, 0)$
в) Решите дифференциальное уравнение

$$y^{(4)} + 4y^{(3)} + 6y^{(2)} + 4y' + y = 0,$$

если $y_1(0) = \dots = y^{(3)}(0) = 0$, а y – четырежды дифференцируемая функция в окретсности нуля.

Задача 12. Докажите, что собственные значения матрицы $f(A)$ это в точности $f(\lambda_i), i = 1, \ldots, k$, где λ_i – собственные значения матрицы A.

Задача 13. * Докажите, что

а) $\exp : M_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ – сюръективно.

б) Докажите, что $\exp : M_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$ – не сюръективно, но квадрат любой матрицы $A \in GL_n(\mathbb{R})$ лежит в образе.