Начала теории групп.

Задача 1. а) Пусть $K \subset H$ подгруппа и $H \subset G$ подгруппа конечной группы G. Докажите, что

$$|G : K| = |G : H||H : K|$$

б) Докажите, что если $|G| = p$, p – простое, то $G \simeq \mathbb{Z}_p$.
в) Пусть H, K – подгруппы конченой группы G. Тогда $H \cap K$ – подгруппа и $|K : H \cap K| \leq |G : H|$ и равенство достигается, если $HK = G$.
г) Пусть H, K – подгруппы конченой группы G и числа $|G : H|$ и $|G : K|$ – взаимнопросты. Докажите, что $G = HK$.

Задача 2. Докажите, что в конечной группе нечётного порядка у любого элемента существует единственный квадратный корень.

Задача 3. Пусть H_1, H_2 подгруппы группы G. Докажите, что H_1H_2 – подгруппа G тогда и только тогда когда $H_1H_2 = H_2H_1$. Приведите пример группы и двух подгрупп, произведение которых не является подгруппой.

Задача 4. а) Докажите, что любой элемент $\sigma \in S_n$ представляется в виде произведения непересекающихся циклов единственным образом.
б) Что происходит с циклом при сопряжении элементом $\sigma \in S_n$? Опишите классы сопряжённости в S_n и найдите их порядки.

Задача 5. а) Верно ли, что нормальная подгруппа нормальной подгруппы нормальна в объемлющей группе?
б) Подгруппа называется характеристической, если она инварианта относительно всех автоморфизмов группы. Покажите что, если H характеристическая подгруппа в N, а N – нормальна в G, то H нормальна в G. Верно ли это утверждение, если поменять слова “характреистическая” и “нормальная” местами?
в) Пусть G – конечная группа и p – минимальный простой делитель $|G|$. Пусть $|G : H| = p$. Докажите, что H – нормальная подгруппа G.
г) Пусть в некоторой группе все подгруппы – нормальны. Верно ли, что группа – абелева?

Задача 6. а) Пусть G - конечная группа и p – простое. Тогда $|G| = p^k$ для некоторого k тогда и только тогда когда порядки всех элементов G – это степени p.
б) Если все элементы G (кроме e) имеют одинаковый порядок, то этот порядок равен p, а $|G| = p^k$.
в) Используя предыдущий пункт докажите, что порядок конечного поля равен степени простого числа.

Задача 7. а) Пусть H — любая, а N — нормальная подгруппы некой группы. Покажите, что $H \cap N \trianglelefteq H$, $HN = NH$ – подгруппа, $N \trianglelefteq HN$ и $HN/N \simeq N/H \cap N$.
б) Пусть G – группа, $K \subset G$ – нормальная подгруппа, и N подгруппа K, нормальная в G. Тогда $K/N \trianglelefteq G/N$ и $(G/N)/(K/N) \simeq G/K$.

Задача 8. а) Докажите, что $PGL_n(\mathbb{C}) \simeq PSL_n(\mathbb{C})$.
б) Докажите, что $PGL_n(\Bbbk) \simeq PSL_n(\Bbbk)$ тогда и только тогда, когда у каждого элемента $\Bbbk$ существует корень n-ой степени из 1 в $\Bbbk$.
в) Докажите, что $PGL_n(\mathbb{R}) \simeq PSL_n(\mathbb{R}) \simeq SL_n(\mathbb{R})$ для нечётного n. Докажите, что $PSL_n(\mathbb{R})$ подгруппа индекса 2 в $PGL_n(\mathbb{R})$ для чётного n.

Задача 9. а) Докажите, что $Aut(Q_8) = S_4$.
б) Докажите, что если $f \in Aut(S_n)$ и f переводит транспозиции в транспозиции, то f – внутренний автоморфизм.
в) Докажите, что $Aut(S_n) = S_n, n \neq 2, 6$.
г) Верно ли, что $Aut(G_1 \times G_2) \simeq Aut(G_1) \times Aut(G_2)$?
д) Пусть G_1, G_2 – конечные группы взаимнопростых порядков. Докажите, что $Aut(G_1 \times G_2) \simeq Aut(G_1) \times Aut(G_2)$.

Задача 10. Проективной прямой $\Bbbk\mathbb{P}^1$ над полем $\Bbbk$ будем называть множество прямых в двумерном пространстве $\Bbbk^2$. Биективное отображение $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ будем называть проективным преобразованием, если оно индуцированно линейным преобразованием $\Bbbk^2$.
а) Докажите, что проективные преобразования образуют группу изоморфную $PGL_2(\Bbbk)$.
б) Отождествите $\Bbbk\mathbb{P}^1$ с множеством $\Bbbk \cup \{\infty\}$. Докажите, что при этом отождествлении группа проективных преобразований отождествляется с дробно-линейными биективными отображениями

$$\Bbbk \cup \{\infty\} \to \Bbbk \cup \{\infty\}, x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}, a, b, c, d \in \Bbbk, ad - bc \neq 0$$

в) Пусть p – простое число. Структурой проективной прямой на множестве $\{0, 1, \ldots, p-1, \infty\}$ будем называть биекцию $\Bbbk\mathbb{P}^1 \to \{0, 1, \ldots, p-1, \infty\}$. Будем говорить, что структуры f, g эквивалентны, если $f \circ g^{-1}$ – проективное преобразование. Докажите, что число классов эквивалентности равно $p+1$.
г) Пусть $f : S_6 \to S_6$ – отображение, переводящее перестановку $\{0, \ldots, 4, \infty\}$ в перестановку шести структур проективной прямой на этом множестве (структуры как-то занумерованны). Найдите $f((01)(23)(4\infty))$.
д) Докажите, что f – внешний автомрфизм группы S_6.
е*) Докажите, что $Aut(S_6) \simeq S_6 \rtimes \mathbb{Z}_2$.

Задача 11. а) Докажите, что A_n порождается циклами длины 3.
б) Задайте A_n образующими и соотношениями.

Задача 12. а) Задайте группу $SL_2(\mathbb{Z})$ образующими и соотношениями.
б) Докажите, что $[SL_2(\mathbb{Z}), SL_2(\mathbb{Z})]$ является собственной подгруппой $SL_2(\mathbb{Z})$.
в) Найдите $|SL_2(\mathbb{Z}) : [SL_2(\mathbb{Z}), SL_2(\mathbb{Z})]|$.

Задача 13. Пусть G – конечнопредставленная группа, причём число соотношений меньше чем число образующих. Докажите, что G – бесконечна.