Расширения групп.

В этом листке G – некоторая группа.

Определение. *Групповая алгебра над* $\mathbb{Z}$ – это свободный $\mathbb{Z}$-модуль $\mathbb{Z}[G]$ с базисом $e_g, g \in G$ и умножением $e_g \cdot e_{g'} = e_{gg'}$.

Задача 1. Пусть M это левый $\mathbb{Z}[G]$-модуль (в частности, абелева группа). Рассмотрим комплекс

$$C^0(G,M) \xrightarrow{d_1} C^1(G,M) \to \ldots \to C^{n-1}(G,M) \xrightarrow{d_n} C^n(G,M) \to \ldots$$

где $C^n(G,M) = \{$*отображения множеств* $\varphi : G^n \to M\}$ – $\mathbb{Z}$-модуль, а морфизм d_{n-1} $\mathbb{Z}$-модулей определен по правилу

$$(d_n\phi)(g_1,\ldots,g_n) = g_1 \cdot \phi(g_2,\ldots,g_n) - \phi(g_1g_2,g_3,\ldots,g_n) + \phi(g_1,g_2g_3,g_4,\ldots,g_n) - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n-1}\phi(g_1,g_2,\ldots,g_{n-2},g_{n-1}g_n) + (-1)^n\phi(g_1,\ldots,g_{n-1}).$$

Докажите, что $d_{i+1}d_i = 0$. В частности, $\mathrm{im}(d_i) \subset \ker(d_{i+1})$.

Определение. *Когомологии группы G с коэффициентами в M* это

$$H^n(G,M) := \ker(d_{n+1})/\mathrm{im}(d_n).$$

Задача 2. Опишите $H^0(G,M)$ в терминах действия G на M.

Задача 3. Пусть G действует на M тривиально. Вычислите $H^1(G,M)$.

Задача 4. а) По структуре $\mathbb{Z}[G]$-модуля на абелевой группе M постройте полупрямое произведение $M \rtimes G$.
б) Пусть $\pi : M \rtimes G \to G$ естественная проекция. *Сечением* будем называть гомоморфизм групп s такой что $\pi \circ s = \mathrm{id}_G$. Покажите что присоединенное действие M на $M \rtimes G$ продолжается до действия M на множестве всех сечений.
в) Постройте биекцию

$$\{\textit{Сечения}\}/M \to H^1(G,M).$$

Задача 5. Пусть действие на M тривиально. Вычислите $H^2(C_2,M)$ для $M = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ и $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Задача 6. *Нормализованным коциклом* называется $\phi \in \ker(d_3)$ такой что $\phi(g,1) = \phi(1,g) = 0$. Покажите что в любом классе $H^2(G,M)$ лежит хотя бы один нормализованный коцикл.

Задача 7. а) Пусть $G = \mathbb{Z}$. Покажите что любой нормализованный коцикл $\phi \in \ker(d_3)$ однозначно определяется своими значениями на парах $(n,1)$, $n \in \mathbb{Z}$.
б) Вычислите $H^2(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$.

Задача 8. Пусть q и p различные простые числа. Вычислите $H^2(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z},\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

Задача 9. Вычислите $H^2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ для действия заданного перестановкой сомножителей в произведении.

Задача 10*. Вычислите $H^2(S_3,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Расширением группы G с помощью абелевой группы M называется любая точная последовательность

$$1 \to M \to E \xrightarrow{\pi} G \to 1.$$

Задача 11. а) Покажите, что действие E на M сопряжениями задаёт структуру $\mathbb{Z}[G]$-модуля на M (расширение называется *центральным*, если такая структура тривиальна).
б) Точная последовательность расщепима тогда и только тогда, когда $E = M \rtimes G$.
в) Пусть s это теоретико-множественное сечение (т. е. s это отображение множеств и $\pi \circ s = \mathrm{id}_G$). Выберем s так что бы $s(e) = e$ и определим $\varphi(g_1,g_2) := s(g_1)s(g_2)s(g_1g_2)^{-1}$. Покажите, что $\varphi \in \ker(d_3)$.
г) Постройте отображение множеств

$$\{\textit{Расширения } G \textit{ с помощью } M\} \to H^2(G,M).$$

Определение. Будем говорить что два расширения эквивалентны если существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} M & \longrightarrow & E & \longrightarrow & G \\ \| & & \downarrow & & \| \\ M & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & G \end{array}$$

Задача 12. а) Проверьте, что эквивалентность расширений – отношение эквивалентности.
б) Докажите, что если два расширения эквивалентны, то соответствующие группы изоморфны. Верно ли обратное?
в) Пусть φ - нормализованный коцикл. Определим нам множестве $G \times M$ операцию $*_\varphi$ по правилу

$$(m_1, g_1) *_\varphi (m_2, g_2) = (m_1 + g_1 m_2 + \phi(g_1, g_2), g_1 g_2).$$

Покажите что она задает структуру группы на множестве $M \times G$ и определяет некоторое расширение G с помощью M.
г) Постройте биекцию

$$H^2(G, M) \to \{\textit{Классы эквивалентности расширений } G \textit{ с помощью } M\}.$$

д) Докажите, что $H^2(G, M) = 0$ тогда и только тогда, когда все расширения расщепимы.

Задача 13. Опишите все неэквивалентные центральные расширения в задачах 5, 7 и 8.

Задача 14. Пусть p простое и $0 < a < p$. Покажите что вложение $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$; $b \mapsto bap$ задаёт расширение $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ с помощью $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Вычислите $H^2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ и опишите всевозможные расширения.

Задача 15. Рассмотрим точную последовательность

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} H \xrightarrow{h} \mathbb{Z}^2 \longrightarrow 1$$

где $H = H_\infty$ группа Гейзенберга строго верхнетреугольных матриц с целыми коэффициентами, $f(n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $h\left(\begin{pmatrix} 1 & n & m \\ 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = (n, l)$.

а) Покажите что $H^2(\mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}) \neq 0$.
б*) Вычислите $H^2(\mathbb{Z}^2, \mathbb{Z})$.
в*) Опишите все неэквивалентные центральные расширения $\mathbb{Z}^2$ с помощью $\mathbb{Z}$.

Задача 16. Придумайте какое-нибудь расширение $1 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to SL_2(\mathbb{F}_5) \to A_5 \to 1$ и покажите что $H^2(A_5, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \neq 0$.