Билинейные и квадратичные формы - 2.

Задача 1. Пусть $f(t) \in \mathbb{R}[x]$ степени n и известно, что все корни $f(t)$ – различны. Пусть $z_1, \ldots, z_n$ – корни. Для каждого z_k определим $l_k(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 z_k + \ldots + x_n z_k^{n-1}$ и $Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} l_k^2(x_1, \ldots, x_n)$.
а) Докажите, что $Q(x_1, \ldots, x_n)$ принимает вещественные значения, если $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.
б) Докажите, что все корни f вещественны тогда и только тогда когда Q – положительно определена.
в) Докажите, что матрица Q в стандартном базисе имеет вид

$$\begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{n-1} & s_n & \ldots & s_{2n-2} \end{pmatrix},$$

где $s_k = \sum_{i=1}^{n} z_i^k$.
г) Используя предыдущий пункт найдите критерий вещественности корней многочлена $x^2 + px + q$ и $x^3 + px + q$ через его коэффициенты.

Задача 2. Классифицируйте все анизотропные симметрические билинейные форма над конечным полем $\mathbb{F}_q$.

Задача 3. Покажите, что в пространстве с невырожденной кососимметрической билинейной формой каждое изотропное подпространство содержится в изотропном подпространстве вдвое большей размерности.

Задача 4. а) Докажите следующую версию леммы Витта для кососимметрической билинейной формы: Пусть (V_1, B_1) и (V_2, B_2) – два изометричных пространства с невырожденными кососимметрическими билинейными формами. Тогда любая изометрия между подпространствами $U_1 \subset V_1$ и $U_2 \subset V_2$ продолжается до изометрии между V_1 и V_2. **б)** Докажите, что группа симметрий кососимметрической билинейной формы действует транзитивно на изотропных подпространствах заданной размерности.

Задача 5*. [Классификация произвольных билинейных форм]
а) Докажите, что на n-мерном пространстве над алгебраически замкнутым полем канонический оператор A[1] любой невырожденной билинейной формы имеет возвратный характеристический многочлен;
б) Для каждого $\lambda \neq \pm 1$ из спектра оператора A имеется сохраняющая размеры клеток биекция между жордановыми клетками с собственным числом λ и жордановыми клетками с собственным числом $-\lambda$;
в) Количества жордановых клеток каждого чётного размера с собственным числом $+1$ и каждого нечётного размера с собственным числом -1 всегда чётны;
г) каждый невырожденный линейный оператор, удовлетворяющий условиям (а) и (б), является каноническим оператором для единственной с точностью до изометрического изоморфизма невырожденной билинейной формы.
д) Каким опреторам соответствую симметрические билинейные формы? Кососимметрические?
Задача 6. а) Пусть B – невырожденная симметрическая билинейная форма на пространстве V над полем, характеристики отличной от двух. Докажите, что любой элемент $O_B(V)$ представляется в виде композиции не более чем $2n$ отражений. **б)** Если B – анизотропна на V, то композицией не более n отражений.

Задача 7. а) Докажите, что порядок группы $Sp_{2n}(\Bbbk)$ равен

$$\prod_{i=1}^{n} (q^{2i} - 1) q^{2i-1},$$

где $|\Bbbk| = q$.

[1] То есть такой A, что $B(u,v) = B(v, Au)$ для любых u, v.

б) Докажите, что $Sp_2(\Bbbk) \simeq SL_2(\Bbbk)$ и что $Sp_2(\Bbbk)$ порождена $T_v(\lambda) : x \mapsto x + \lambda B(x, v)v$, где B – невырожденная кососимметрическая билинейная форма на $\Bbbk^2$, соответствующая $Sp_2(\Bbbk)$.
в) Рассмотрим подгруппу $G \subset Sp_{2n}(\Bbbk)$ порожденную симлектическими трансвекциями, то есть такими

$$T_v(\lambda) : V \to V, x \mapsto x + \lambda B(x, v)v,$$

где B – кососимметрическая билинейная форма, соответствующая $Sp_{2n}(\Bbbk)$, $v \in V, v \neq 0$ и $\lambda \in \Bbbk^\times$ (убедитесь, что это действительно симлектические преобразования). Докажите, что G действует транзитивно на множестве (упорядоченных) симплектических базисов.
г) Докажите, что $Sp_{2n}(\Bbbk)$ порождается симлектическими трансвекциями и что $Sp_{2n}(\Bbbk) \subset SL_{2n}(\Bbbk)$.
д) Для каких n группы $Psp_{2n}(\Bbbk) := Sp_{2n}(\Bbbk)/Z(Sp_{2n}(\Bbbk))$ и $Sp_{2n}(\Bbbk)$ изоморфны?
е*) Действие G на X называется примитивным, если ни одно подмножество X не инвариантно относительно действия G. Докажите, что в критерии Ивасавы можно заменить 2-транзитивное действие на примитивное.
ж) Пусть $n > 1$ и $(n, |\Bbbk|) \neq (2, 3), (3, 2)$. Рассмотрев действие $Sp_{2n}(\Bbbk)$ на одномерных подпространствах, с помощью критерия Ивасавы, докажите, что $PSp_{2n}(\Bbbk)$ – простая при $n \neq 2, |\Bbbk| \neq 2$.
з) Докажите простоту $PSp_4(\mathbb{F}_3)$ и $PSp_6(\mathbb{F}_2)$.
и) Рассмотрев действие S_6 на $\mathbb{F}_2^6$ постройте изоморфизм $Sp_4(\mathbb{F}_2) \simeq S_6$.

Задача 8. [Простые ортогональные группы] В этой задаче $\Bbbk$ это конечное поле мощности q и характеристики отличной от двух, V – векторное пространство размерности n над $\Bbbk$.
а) Докажите, что если n нечётно, $O_{B_1}(V) \simeq O_{B_2}(V)$ для любых невырожденных билинейных симметрических форм B_1 и B_2. Будем обозначать такую группу $O_{2n+1}(q)$.
б) Докажите, что если n чётно, то существуют две неизоморфных ортогональных группы, которые могут быть охарактеризованы следующим образом:
$O^+_{2n}(q)$ – существует изотропное пространство размерности n;
$O^-_{2n}(q)$ – иначе.
в) Докажите, что ядро гомоморфизма $\det : O_n(\Bbbk) \to \Bbbk$ – это подгруппа индекса 2, обозначаемая через $SO_n(q)$.
г) Определим $PSO_n(q) := SO_n(q)/Z(SO_n(q))$. В каких случаях $PSO_n(q) \simeq SO_n(q)$?
д*) Согласно задаче 5, любой элемент $SO_{2n}(q)$ представляется в виде композиции чётного числа отражений. Определим чётное отражение, если оно обращает знак вектора длины 1 и нечётное, если оно обращает знак вектора длины α, не являющейся квадратом в $\Bbbk$. Обозначим через $\Omega_n(q)$ подгруппу, порожденную преобразованиями, которые являются композицией чётных отражений. Докажите, что $\Omega_n(q)$ является подгруппой индекса 2 в $SO_n(q)$.
е) Докажите, что $PSO^\pm_{2n}(q) \simeq P\Omega_n(q)^\varepsilon$ тогда и только тогда, когда $q^m \neq \varepsilon \pmod 4$.
ж*) Докажите, что

$$|SO_{2n+1}(q)| = \prod_{k=1}^{n}((q^{2k} - 1)q^{2k-1})$$

$$|SO^+_{2n}(q)| = (q - 1)\prod_{k=2}^{n}((q^k - 1)(q^{k-1} + 1)q^{2k-2})$$

$$|SO^+_{2n}(q)| = q^{m(m-1)}(q^2 - 1)\dots(q^{2m-2} - 1)(q^m + 1)$$

з)** Докажите, что группы $P\Omega_{2n+1}(q)$ и $P\Omega^\pm_{2n}(q)$ – простые.