Евклидово пространство, сопряжённые операторы.

Задача 1. Пусть V – векторное пространство над $\mathbb{R}$ и $\dim V = n$. Докажите, что если $C : V \to V$ – линейное преобразование и объём параллелепипеда, натянутого на вектора $v_1, \ldots, v_n$ равен V, то объём параллелепипеда, натянутого на вектора $Cv_1, \ldots, Cv_n$ равен $|\det C| \cdot V$.

Задача 2. а) Рассмотрим группу $O_n(\mathbb{R})$ как топологическое пространство в индуцированной с $M_n(\mathbb{R})$ топологии. Докажите, что группа $O_n(\mathbb{R})$ содержит ровно две компоненты (линейной) связности. **б*)** Докажите, что группы $O_{p,q}(\mathbb{R})$ содержит четыре компоненты (линейной) связности.

Задача 3. а) Докажите, что для любая матрица из $GL_n(\mathbb{R})$ может быть единственным образом представлена в виде произведения $A = OU$, где $O \in O_n(\mathbb{R})$, а U– верхнетреугольная матрица с положительными числами на диагонали.
б*) Обозначим через $GL_n^+(\mathbb{R})$ подгруппу матриц с положительным определителем. Докажите, что $\pi_1(GL_n^+(\mathbb{R})) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ для $n \geq 3$, $\pi_1(GL_2^+(\mathbb{R})) \simeq \mathbb{Z}$.
в) Докажите, что для любая матрица из $GL_n(\mathbb{R})$ может быть единственным образом представлена в виде произведения $A = SO$, где S –положительно определённый симметрический оператор, а O – ортогональный.

Задача 4. Рассмотрим билинейные формы на пространстве $\mathbb{R}[x]$.
а) $\int_{-1}^{1} \dfrac{f(x)g(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}$;
б) $\int_{0}^{\infty} f(x)g(x)e^{-x}dx$;
в) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-x^2}dx$;
г) $\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$.
Докажите, что эти формы являются евклидовым скалярным произведением и ортогонализуйте стандартный базис $\{x^n\}$ по отношению к этим скалярным произведениям.
Указание. Многочлены Лагера $L_n(x) = e^x \dfrac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)$; Многочлены Эрмита $E_n(x) = e^{x^2} \dfrac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$; Многочлены Лежандра $P_n(x) = \dfrac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^n$; Многочлены Чебышева $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$.
д) Найдите сопряженные операторы к операторам x, $\frac{\partial}{\partial x}$, $x\frac{\partial}{\partial x}$ относительно форм в) и г).

Задача 5. Пусть $A : V \to V$ – кососимметрический линейный оператор. Покажите, что оператор $\exp(A)$ ортогональный.

Задача 6. Докажите, что в псевдоевклидовом пространстве верно, что $(x,x)(y,y) \leq (x,y)^2$ и равенство достигается только в случае пропорциональности векторов.

Задача 7. а) Докажите, что две для двух квадратичных форм над $\mathbb{R}$, одна из которых положительно определена, существует базис в котором обе формы имеют канонический вид. **б)** Докажите, что если формы произвольные, то такого базиса, вообще говоря, не существует.

Задача 8. Докажите, что для матрицы самосопряженного линейного оператора в произвольном базисе верно $A^T\Gamma = \Gamma A$, где Γ – матрица Грама соответствующей положительно определённой билинейной формы.