Комплексификация и овеществление.

Задача 1. [**Условия Коши-Римана.**] Запишите критерий голоморфности функции $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ в терминах её вещественной и мнимой части.

Задача 2. Найдите коразмерность[1] подпространства $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)$ в пространстве $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(W_{\mathbb{R}})$.

Задача 3. Пусть F - линейный оператор на W. Обозначим через $F_{\mathbb{C}} : (W_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} \to (W_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}$ комплексификацию вещественно линейного оператора $F_{\mathbb{R}} : W_{\mathbb{R}} \to W_{\mathbb{R}}$ на овеществлённом пространстве $W_{\mathbb{R}}$. Выясните, как связаны друг с другом характеристические многочлены, собственные числа и собственные векторы операторов F и $F_{\mathbb{C}}$
а) в случае когда $W = \mathbb{C}$ и $F(z) = i \cdot z$;
б) для произвольного F.

Задача 4. Докажите, что если $x = ai + bj + ck, y = di + ej + fk \in \mathbb{H}$ – чисто мнимые кватернионы и $\vec{u} = (a, b, c), \vec{v} = (d, e, f)$, то $xy = (\vec{u}, \vec{v}) + \vec{u} \times \vec{v}$.

Задача 5. Покажите, что центр тела кватернионов совпадает с пространством чисто вещественных кватернионов:

$$Z(\mathbb{H}) := \{t \in \mathbb{H} | \, qt = tq \, \forall \, q \in \mathbb{H}\} \simeq \mathbb{R} \cdot e.$$

Задача 6. а) Опишите решения уравнения $x^2 = -1$ в кватернионах.
б) Пусть q это корень уравнения из предыдущего пункта. Докажите, что множество кватернионов вида $a + q \cdot b$; $a, \, b \in \mathbb{R}$ образуют в $\mathbb{H}$ подполе, изоморфное $\mathbb{C}$.

Задача 7. Рассмотрим отображение

$$SU_2 \to SO_3(\mathbb{R}), x \to xqx^{-1},$$

где q – чисто мнимый кватернион, x – кватернион по норме равный единице. Запишите явно матрицу в базисе из матриц Паули образ $x \in SU_2$.

Задача 8. Докажите, что $\pi_1(SO_3(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Задача 9*. а) Укажите в $M_2(\mathbb{C})$ базис, в котором форма $\det$ имеет диагональную матрицу Грама с элементами $(1, -1, -1, -1)$ на диагонали.
б) Докажите, что отображение

$$\psi : SL_2(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C}) \to SO_4(\mathbb{C}), (x, y) \mapsto (A \mapsto xAy^{-1})$$

является сюръективным гомомофризмом групп.
в) Вычислите явно $\psi(x, y)$ в базисе из пункта а).

---
[1] над полем $\mathbb{R}$