Домашний экзамен по курсу "Кольца когомологий групп"

Оценка "отлично"соответствует 150 баллам, зачёт - 80 баллов.

Сдавать можно как письменно, так и в формате очной беседы. Поиск решений в литературе приветствуется, но желательно *хорошо* понимать цитируемое доказательство.

0 Групповые кольца

(20) $\mathbb{F}_p G$ — локальное кольцо $\Leftrightarrow$ G это p-группа (не обязательно конечная).

(30) Пусть G - конечная группа. Тогда RG — локальное кольцо $\Leftrightarrow$ R — локальное, $p \in J(R)$, и G — p-группа.

(20) Пусть в группе 2-силовская циклическая. Тогда эта силовская — прямой сомножитель.

(20) Пусть у конечной группы существует неабелева силовская подгруппа в простом, отличном от 2. Тогда в $\mathbb{Z}G$ существует обратимый элемент бесконечного порядка.

1 Явные вычисления

Если в выражении $H^*(G, M)$ действие G на M не указано явно, то это модуль с тривиальным действием.

(20) Вычислить кольцо когомологий $H^*(\mathbb{Z}/p^2 \rtimes \mathbb{Z}/p, \mathbb{F}_p)$ для всех возможных действий $\mathbb{Z}/p$ на $\mathbb{Z}/p^2$.

(40) Вычислить кольцо когомологий $H^*(A_5, \mathbb{F}_p)$ для всех простых p.

(60) Вычислить кольцо когомологий $H^*(A_6, \mathbb{F}_p)$ для всех простых p.

(20) Вычислить кольцо когомологий $H^*(D_8, \mathbb{F}_2)$, где D_8 это группа изометрий квадрата. Подсказка: найти хорошую структуру полупрямого произведения.

(20) Вычислить кольцо когомологий с коэффициентами в тривиальном модуле R группы матриц

$$\begin{bmatrix} 1 & R & R \\ 0 & 1 & R \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где R — это кольцо $\mathbb{Z}$ (или $\mathbb{Z}/n$; $+10$ баллов). Подсказка: эта группа является расширением двух абелевых двумя разными способами.

(10) Определить, на каком листе вырождается спектральная последовательность (центрального) расширения кватернионной группы $\mathbb{Z}/2 \to Q_8 \to (\mathbb{Z}/2)^2$ с коэффициентами в тривиальном модуле $\mathbb{F}_2$.

(20) Вычислить кольцо когомологий $H^*(Q_8, \mathbb{F}_2)$.

(10) Вычислить группы когомологий $GL(V)$ с коэффициентами в тавтологическом модуле V, где V — векторное пространство над полем, отличным от $\mathbb{F}_2$.

(40) Вычислить $H^2(GL(V), V)$, где V — векторное пространство над $\mathbb{F}_2$ достаточно большой размерности.

(30) Вычислить $H^*(Homeo_c(\mathbb{R}^n), \mathbb{Z})$ — группы гомеоморфизмов с компактным носителем. (Подсказка: воспользоваться формулой Кюннета и самоподобной структурой этой группы.)

(20) Найти нетривиальный класс в $H^2(Homeo^+(S^1), \mathbb{Z})$.

2 Резольвенты и EG

(10) Категория $Cay(G)$ определяется так: объекты это элементы группы, а морфизмы это левые умножения. Доказать, что нерв этой категории является моделью EG. (Определение нерва подсмотрите где-нибудь.)

(10) Построить проективную резольвенту полиномиального роста для тривиального модуля $\mathbb{F}_2$ над $\mathbb{F}_2[\mathbb{Z}/2]$, и строго коассоциативное коумножение на этой проективной резольвенте.

(40) Построить проективную резольвенту полиномиального роста для тривиального модуля $\mathbb{F}_3$ над $\mathbb{F}_3[\mathbb{Z}/3]$, и строго коассоциативное коумножение на этой проективной резольвенте.

(20) Пусть у конечной группы G циклические силовские подгруппы. Доказать, что существует $\mathbb{Z}G$-модуль M, порождённый 1 элементом, такой, что когомологии с коэффициентами в M содержат элемент аддитивного порядка $|G|$.

(80) Описать классы конечных групп L_k и W_k (в частности, понять, совпадают ли они). L_k это класс групп G, для которых минимальное количество порождающих (ранг) модуля с $|G|$-кручением в когомологиях равен k. W_k это те, для которых $\inf_{i>0} rk\Omega^i(\mathbb{Z}) = k$. Описать связь с p-рангом группы. Понять, определяются ли эти инварианты кольцами когомологий с коэффициентами $\mathbb{F}_p$.

(30) Доказать или привести контрпример: $H^*(G,\mathbb{Z})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q} \cong H^*(G,\mathbb{Q})$ для а) всех групп; б) для всех конечнопорождённых групп; в) для всех групп с классифицирующим пространством, являющимся конечным клеточным комплексом.

(30) Доказать эквивалентность условий для $\mathbb{Z}G$-модуля M: а) $projdimM \leq 1$; б) $projdimM < \infty$; в) $\hat{H}^*(H,M) = 0, H \subset G$; г) $projdimM \leq 1$ при ограничении на все силовские подгруппы. Если модуль $\mathbb{Z}$-свободен, то это эквивалентно проективности.

3 $V_G(M)$

Все группы конечные, над алгебраически замкнутым полем конечной характеристики, делящей порядок группы.

(20) Доказать, что алгебраическое многообразие $V_G \setminus \{0\}$ связно для любой конечной группы.

(20) Описать V_{Q_8}.

(20) Описать V_{D_8}.

(30) Вычислить $V(M)$ для группы $D_8 = \langle x, y | x^2, y^2, xyxy = yxyx\rangle$,

$$x \mapsto \begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&1&1&0&0\\0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}, y \mapsto \begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&1&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

(20) Построить бесконечно много неизоморфных модулей над $(\mathbb{Z}/p)^2$ размерности p. (Подсказка: пусть генераторы действуют жордановыми клетками. Вычислить rank variety этого модуля.)

(15) Привести пример непроективного (не конечнопорождённого) M, для которого $V(M) = \{0\}$.

(30) Пусть поле k *не* алгебраически замкнуто. Привести пример непроективного конечнопорождённого модуля M, для которого $V(M) = \{0\}$. (Подсказка: воспользоваться совпадением rank variety и support variety для элементарных абелевых групп, и посмотреть на поле рациональных функций $\mathbb{F}_2(V_G)$.)

4 Категорные методы

Абелева категория называется фробениусовой, если в ней достаточно много проективных и инъективных, и любой проективный модуль инъективен.

Стабильной категорией $St\mathbf{A}$ фробениусовой категории $\mathbf{A}$ называется факторкатегория $\mathbf{A}/\operatorname{Proj}\mathbf{A}$ по идеалу морфизмов, пропускающихся через проективный.

(20) Доказать, что в фробениусовой категории любой инъективный модуль проективен.

(10) Мономорфизм в $\mathbf{A}$ расщепим $\Leftrightarrow$ его образ в $St\mathbf{A}$ расщепим.

(20) Соответствие $X \mapsto \operatorname{Coker}[X \to E(X)]$ (коядро вложения в инъективную оболочку) является функтором сдвига для некоторой структуры триангулированной категории на $St\mathbf{A}$. Описать явно триангулированную струкутру, в которой для любой точной последовательности $X \to Y \to Z$ существует треугольник $X \to Y \to Z \to \operatorname{Coker}[X \to E(X)]$ для некоторого выбора морфизма $Z \to \operatorname{Coker}[X \to E(X)]$.

(20) Доказать, что для фробениусовой категории $\mathbf{A}$ гомотопическая категория ацикличных комплексов $\mathbf{K}_{ac}(\operatorname{Inj}\mathbf{A})$ эквивалентна $St\mathbf{A}$ как триангулированная категория.

(15) Пусть фробениусова категория $\mathbf{A}$ — категория Гротендика, и имеет множество генераторов, являющихся нётеровыми объектами. Доказать, что $\mathbf{K}(\operatorname{Inj}\mathbf{A})$ компактно порождена и имеет прямые суммы.

(25) (В этом и следующием упражнении $R = H^*(G,k)$.) Используя то, что а) триангулированная категория $\mathbf{K}(\operatorname{Inj} R)$ компактно порождена и имеет прямые суммы; б) теорему о представимости Брауна для компактно порождённой триангулированной категории с прямыми суммами, доказать, что существует строго полное вложение

$$T : \operatorname{Inj}\operatorname{Mod}{-}R \to \mathbf{K}(\operatorname{Inj} kG).$$

Подсказка: доказать, что для любого $I \in \operatorname{Inj}\operatorname{Mod}{-}R$, выполнено

$$\operatorname{Hom}^*_R(H^*(G,-), I \cong Hom^*_{\mathbf{K}(kG)}(-, T(I)),$$

где слева Hom^* это градуированный Hom, а справа Ext в триангулированной категории.

(15) (Можно пользоваться предыдущей задачей.) Пусть $I \in \operatorname{Inj}\operatorname{Mod}{-}R$ без кручения (аннулятор любого элемента кольца нулевой). Тогда $\hat{H}^*(G, T(I)) \cong I$.