Лекции по линейной алгебре

А.Л.Городенцев

25 декабря 1994 года

Аннотация

Эта книга — несколько расширенная запись обязательного курса линейной алгебры весеннего семестра 1993/94 учебного года для первокурсников НМУ. Текст адаптирован для *чтения*, а не для слушания, и потому его логическое разбиение на "лекции" не вполне соответствует содержанию реально читавшихся лекций. Зато доказательства проводятся более подробно. Все приводимые в тексте задачи *обязательно* следует решать (если специально не указано противное), ибо они необходимы для понимания дальнейшего материала, и именно из их числа составлялась экзаменационная письменная работа.

Содержание

Лекция 1: **Векторные пространства** **6**
§1. Напоминание основных понятий . . . 6
◇ матричные обозначения для векторов . . . 7
◇ линейная зависимость . . . 7
◇ базисы и размерность . . . 8
◇ координаты . . . 8
◇ взаимное расположение подпространств . . . 9
§2. Двойственность . . . 11
◇ сопряжённое пространство . . . 11
◇ сопряжённый базис . . . 12
◇ изоморфизм $V \xrightarrow{\sim} V^{**}$ . . . 12
◇ матричные обозначения для ковекторов . . . 13
◇ аннуляторы . . . 14
§3. Линейные операторы . . . 15
◇ ядро и образ . . . 15
◇ матрицы операторов . . . 16
◇ сопряжённый оператор . . . 17
◇ ранг матрицы . . . 18
◇ интерполяция . . . 19

Лекция 2: **Аффинные пространства** **21**
§1. Основные понятия . . . 21
◇ аффинизация и векторизация . . . 22
◇ аффинные отображения . . . 22
◇ аффинные координаты . . . 24
◇ аффинные подпространства . . . 24
§2. Барицентрические координаты . . . 25
◇ центр тяжести . . . 25
◇ барицентрические комбинации и барицентры . . . 26
◇ барицентрические координаты . . . 27
◇ теорема о группировании масс . . . 27
§3. Выпуклая геометрия. . . . 28
◇ кубы и стандартная топология в $\mathbb{R}^n$ . . . 28
◇ выпуклые оболочки . . . 29
◇ выпуклые множества . . . 30

◇ опорные полупространства 31
◇ грани и крайние точки 32
§4. Выпуклые многогранники. 33
◇ выпуклые многогранники 33
◇ грани многогранников 33
◇ теорема Минковского-Вейля 34
◇ максимумы аффинных функционалов 34

***Лекция 3:* Евклидовы пространства** **35**
§1. Метрики и нормы 35
◇ биекция между метриками и нормами 36
◇ другая форма неравенства треугольника 36
◇ шары и топология 36
§2. Свойства норм 37
◇ эквивалентность норм 37
◇ геометрическое описание норм 38
§3. Скалярное произведение 39
◇ матрицы Грама 40
◇ неравенство Коши-Буняковского-Шварца 41
◇ углы 42
◇ евклидовы метрики 42
§4. Евклидова геометрия 43
◇ объём 43
◇ ортогональное проектировыние 44

***Лекция 4:* Собственные векторы и комплексификация** **46**
§1. Собственные векторы 46
◇ характеристический многочлен 47
◇ подпространства, порождённые собственными векторами 47
◇ изометрии трёхмерного евклидова пространства 48
§2. Комплексификация 50
◇ построение $\mathbb{C} \otimes V$ 50
◇ базисы и размерность 50
◇ комплексификация оператора 51
§3. Овеществление 52
◇ базисы и размерность 53
◇ сравнение линейных групп 53
◇ условия Коши-Римана 54
§4. Комплексная и вещественная структуры 54
◇ вещественная структура 54
◇ комплексная структура 55
§5. Кватернионы 56
◇ кватернионное умножение 56
◇ норма и сопряжение 57
◇ деление 58

Лекция 5: **Линейные операторы на пространствах со скалярным произведением** **59**
§1. Эрмитовы пространства . . . 59
◇ комплексификация евклидова пространства . . . 59
◇ матрицы Грама . . . 60
◇ ортогонализация . . . 61
◇ эрмитова метрика . . . 61
◇ углы . . . 62
◇ изометрии . . . 62
◇ объём . . . 62
§2. Нормальные операторы. . . . 63
◇ сопряжённый оператор . . . 63
◇ критерии нормальности . . . 66
◇ канонический вид операторов в евклидовом пространстве . . . 67
◇ отступление о перестановочных операторах . . . 68

Лекция 6: **Разложение пространства с оператором** **70**
§1. Геометрия пространства с оператором . . . 70
◇ факторизация оператора . . . 70
◇ аннулирущие многочлены . . . 71
◇ разложение подпространства по разложению аннулирующего многочлена . . . 72
§2. Разложение Жордана. . . . 74
◇ корневое разложение . . . 75
◇ аддитивное разложение Жордана . . . 76
§3. Строение нильпотентного оператора (над любым полем). . . . 77
◇ свойства жорданова базиса . . . 77
◇ существование жорданова базиса . . . 78
◇ жорданова нормальная форма матрицы . . . 79
§4. Функции от оператора. . . . 79
◇ интерполяционный многочлен . . . 79
◇ степени оператора . . . 80
◇ алгебраические функции . . . 80
◇ аналитические функции . . . 82
§5. Пространство с оператором как $k[t]$-модуль. . . . 83
◇ разложение V как модуля над $k[t]$ . . . 84
◇ элементарные делители . . . 85
◇ отыскание инвариантных множителей по матрице оператора . . . 86

Лекция 7: **Билинейные формы** **88**
§1. Билинейные формы и корреляции. . . . 88
◇ связь между формами и корреляциями . . . 89
◇ симметричные и кососимметричные формы . . . 89
◇ ядра и невырожденность . . . 90
◇ ядра (косо)симметричных форм . . . 91
§2. Невырожденные формы. . . . 91
◇ сопряжение операторов . . . 91

◇ изометрии 92
◇ формы и операторы 93
§3. Ограничение формы на подпространство 94
◇ ортогоналы 94
◇ изотропные подпространства 94
◇ гиперболическое пространство 95
◇ симплектическое пространство 95
◇ приведение кососимметричной формы 96
§4. Овеществление эрмитова пространства 97
◇ согласованность форм g и ω с комплексной структурой 98
◇ согласованность евклидовой и симплектической структуры 99
§5. Симметричные билинейные и квадратичные формы 100
◇ поляризация квадратичных форм 101
◇ теорема Лагранжа 101
◇ анизотропные подпространства 102
◇ отражения 103
◇ теорема Витта 104

***Лекция 8:* Проективные пространства** **107**
§1. Основные понятия 107
◇ однородные и аффинные координаты 109
◇ функции перехода 110
◇ проективное замыкание 110
§2. Проективные подпространства и проективные преобразования. 111
◇ дополнительные подпространства и проектирование 111
◇ линейные проективные преобразования 112
◇ проективная двойственность 113
§3. Проективные квадрики. 114
◇ взаимодействие квадрики и прямой 114
◇ касательное пространство к квадрике 115
◇ геометрическое строение квадрики 116
◇ пересечение квадрики с касательной гиперплоскостью 117
◇ классификация проективных квадрик 118
◇ классификация аффинных квадрик 120
§4. Поляритеты 120
◇ полярная двойственность относительно квадрики 121
§5. Линейные системы квадрик. 122

Алфавитный указатель 124