§1. Векторные пространства

1.1. Базисы и размерность

1.1.1. Пусть $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ и $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ – два набора векторов, причем $m > n$. Докажите, что если каждый из векторов v_j линейно выражается через векторы e_i, то набор $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ – линейно зависим.

1.1.2. Докажите, что следующие свойства набора векторов $\{e_1, e_2, \dots, e_n\} \subset V$ попарно эквивалентны:

(а) $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ порождают V и это свойство нарушается при выкидывании из набора $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ любого из векторов.

(б) $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ порождает V и в V нет порождающего набора менее, чем из n векторов.

(в) $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ линейно независимы, и это свойство теряется при добавлении к набору любого вектора.

(г) $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ линейно независимы, и в V нет линейно независимых наборов более чем из n векторов.

(д) $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ линейно независимы и порождают V.

(е) Произвольный вектор v записывается в виде $v = \sum \lambda_i e_i$ причем числа $\lambda_i \in k$ однозначно определяются по V.

Терминологическое замечание. Равносильность утверждений (i) – (vi) известна как *теорема о базисе*. Набор векторов $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, удовлетворяющий этим свойствам, называется *базисом* V, а число элементов n этого набора называется *размерностью* V.

1.1.3. Докажите, что размерность не зависит от выбора базиса и совпадает с максимальным n, для которого существует цепочка строго вложенных друг в друга подпространств

$$V = V^0 \supset V^1 \supset V^2 \supset \cdots \supset V^{n-1} \supset V^n = \{0\}$$

1.1.4. Пусть набор $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ порождает V, а его поднабор $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ линейно независим. Докажите, что $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ можно дополнить до базиса в V, добавляя к нему векторы e_j с $j > k$.

1.2. Координаты. Для введения координат на пространстве V фиксируют в нем некоторый базис $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ и сопоставляют каждому вектору столбец его координат:

$$v = \sum x^i e_i \quad \leftrightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

Здесь и далее мы придерживаемся наиболее употребительной в настоящее время системы индексации, в которой нижние индексы нумеруют векторы в наборе векторов, а верхние индексы — координаты. С этой точки зрения матрица (a^i_j), где i – номер строки, j – номер стролбца — суть набор столбцов координат векторов a_1, a_2, $\cdots$, a_n, то есть a^i_j — i-ая координата вектора a_j.

Сопоставление вектору v столбца из его координат устанавливает изоморфизм пространства V с n-мерным *координатным пространством* k^n, элементами которого являются вектор-столбцы высоты n с покомпонентным сложением и умножением на константы.

1.2.5. Докажите, что векторы $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ образуют базис в V тогда и только тогда, когда матрица (v_j^i), составленная из столбцов их координат в базисе $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, невырождена.

Матрицы перехода. В случае, когда векторы $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ образуют базис, предыдущая матрица (v_j^i) из их координат в базисе $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ называется матрицей перехода от базиса $\{e_i\}$ к базису $\{v_j\}$ и обозначается C_{ev}.

1.2.6. Пусть $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — два базиса. $x_e = \begin{pmatrix} {x_e}^1 \\ {x_e}^2 \\ \vdots \\ {x_e}^n \end{pmatrix}$ и $x_v = \begin{pmatrix} {x_v}^1 \\ {x_v}^2 \\ \vdots \\ {x_v}^n \end{pmatrix}$ – координаты одного и того же вектора $\xi \in V$ в этих базисах. Докажите равенства:

(а) $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} C_{ve}$
(б) $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\} C_{ev}$
(в) $C_{ve} = C_{ev}^{-1}$
(г) $x_e = C_{ev} x_v$
(д) $x_v = C_{ve} x_e$.

1.2.7. Пусть $(x)_n = x(x-1)\cdots(x-n+1)$. Докажите, что многочлены $(x)_0 = 1$, $(x)_1$, $\cdots$, $(x)_n$ образуют базис в пространстве многочленов степени меньше или равной n. Какие координаты имеет многочлен $1 + x + x^2$ в этом базисе? Каковы матрицы перехода от этого базиса к стандартному и обратно при $n = 4$?

1.3. Примеры векторных пространств.

Пространство функций. Убедитесь, что множество всех функций на данном множестве M со значением в данном поле k (или более общим образом, — со значениями в произвольном векторном пространстве V) является векторным пространством над k (сложение функций и умножение на константы определяется поточечно). Пространство таких функций обозначается символом k^M (соответственно — V^M). Убедитесь также, что непрерывные, гладкие, аналитические и интегрируемые функции образуют подпространство в $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Продумайте другие примеры естественных пространств функций.

1.3.8. Пусть M — конечное множество из n элементов. Найдите размерность k^M и постройте в нем какй-нибудь базис.

1.3.9. Докажите, что приводимые ниже системы функций линейно независимы в $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$:

(а) $1, \sin x, \cos x$;
(б) $1, \sin x, \cos x, \cdots, \sin nx, \cos nx$;
(в) $1, \sin x, sin^2 x, \cdots, \sin^m x$;
(г) $e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_m x}$;
(д) $x^{\lambda_1}, \ldots, x^{\lambda_m}$ (где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ – попарно различные вещественные числа).

1.3.10. Докажите, что система функций $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\} \in k^M$ тогда и только тогда линейно независима, когда существуют n точек $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\} \in M$ таких, что $\det(f_i(t_j)) \neq 0$.

Пространство многочленов.

1.3.11. Докажите, что множество $P_m \subset k[t]$, состоящее из многочленов степени не выше, чем m, образует подпространство в пространстве многочленов $k[t]$ над полем k. Докажите, что если некоторое подпространство $V \subset k[t]$ содержит хотя бы по одному многочлену каждой степени из степеней $d = 0, 1, ..., m$, то оно содержит все P_m. Найдите размерность P_m.

1.3.12. Для данных $m+1$ чисел $a_0, a_1, \ldots, a_m \in k$ постройте набор из $m+1$ многочленов $f_0, \ldots, f_m \in k[t]$, обладающих тем свойством, что $f_i(a_j) = \delta_{ij}$. Докажите, что они составляют базис в P_m. Чему равны координаты произвольного многочлена $g(t)$ в этом базисе?

1.3.13. *Интерполяционная формула Лагранжа.* Докажите, что имеется и при том только один многочлен степени не большей m , который в заданных $m+1$ точках принимает заданные значения. Приведите для такого многочлена явное выражение.

1.3.14. *Интерполяционная формула Лагранжа с кратными узлами.* Пусть задано k значений переменной $x = x_1, \ldots, x_k$ и для каждого значения x_i задано n_i чисел $y_{0,i}, \ldots, y_{n_{i-1},i} \in k$, причем $\sum n_i = m+1$. Докажите, что существует и единственен многочлен $f(x) \in P_m$, такой что при каждом значении $x = x_0, \ldots, x_k$ выполнены равенства

$$f^{(\nu)}(x_i) = y_{\nu,i} \qquad \text{при всех} \qquad \nu = 0, 1, ..., m_i$$

(здесь $f^{(\nu)}$ - это ν-тая производная от f).

1.3.15. Докажите, что многочлены из P_m, обращающиеся в нуль в заданных k точках, образуют подпространство в P_m. Укажите его базис и размерность.

1.3.16. Какова размерность пространства многочленов с вещественными коэффициентами степени не более n, обращающихся в нуль в точке $3-2i$? В k комплексных невещественных точках?

1.3.17. Докажите, что однородные многочлены степени n образуют (вместе с нулевым многочленом) подпространство в $k[x_1, \ldots, x_m]$; укажите его базис и размерность.

1.3.18. Найдите размерность пространства всех многочленов от m переменных степени, не большей чем n.

1.3.19. Найдите размерность пространства всех однородных симметрических многочленов степени 10 от 4 переменных и размерность пространства всех симметрических многочленов степени, не превосходящей 3 от 4 переменных.

Пространство подмножеств.

1.3.20. Докажите, что множество всех подмножеств данного множества M образует векторное пространство над полем $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ относительно операций

$$X + Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y),$$

$$1 \cdot X = X \qquad \text{и} \qquad 0 \cdot X = \emptyset.$$

1.3.21. Докажите, что это пространство естественно изоморфно пространству $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^M$. Укажите в пространстве подмножеств какой-либо базис.

1.3.22. Докажите, что семейство подмножеств $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ линейно независимо, если выполняется хотя бы одно из условий:

(а) $X_i \not\subset \bigcup\limits_{\nu \neq i} X_\nu$ при всех $i = 1, 2, \cdots n$

(б) $X_1 \not\subset X_2 \not\subset \cdots \not\subset X_n$.

Числовые пространства. Если $k \subset K$ — два поля, то большее поле является векторным пространством над меньшим.

1.3.23. Докажите, что число элементов конечного поля является степенью простого числа.

1.3.24. Докажите, что $\mathbb{R}$ — бесконечномерно над $\mathbb{Q}$. Докажите также, что $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ и $\sqrt{7}$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$.

1.3.25. **(трудная!)** Верно ли, что множество квадратных корней из всех простых чисел линейно независимо над $\mathbb{Q}$?

1.3.26. Пусть $k \subset K$ — два поля и K — конечномерно над k. Докажите, что любой элемнт из K является корнем некоторого многочлена из $k[t]$.

1.3.27. Пусть ϵ — примитивный комплексный корень пятой степени из 1. Докажите, что числа $f(\epsilon)$, где f пробегает все $\mathbb{Q}[t]$, составляет подпространство в $\mathbb{C}$ над $\mathbb{Q}$; найдите его базис и размерность.

1.3.28. Обобщение предыдущего. Пусть $k \subset K$ два поля и $\alpha \in K$ является корнем неприводимого многочлена $f(t) \in k[t]$ степени n. Докажите, что множество чисел вида $f(\alpha)$ по всем $f \in k[x]$ образует подпространство в K над k и найдите его размерность.

Конечные пространства . Пусть V n-мерное пространство над конечным полем $\mathbb{F}_q$ из q элементов.

1.3.29. Сколько всего элементов в V и сколько там различных базисов?

1.3.30. Сколько в V имеется набов из k линейно независимых векторов?

1.3.31. Сколько в V k-мерных подпространств?

Матрицы. Определите, какие из приводимых ниже подмножеств в пространстве матриц типа $n \times n$ над полем k являются подпространствами и укажите их размерности.

1.3.32. Все матрицы ($\mathfrak{gl}_n$).

1.3.33. Невожденные матрицы (Gl_n).

1.3.34. Все вырожденные матрицы.

1.3.35. Верхнетреугольные матрицы $\{(a^i_j) \mid a^i_j = 0$ при $i > j\}$.

1.3.36. Верхнетреугольные матрицы с единицами на главной диагонали.

1.3.37. Симметрические матрицы $\{(a^i_j) \mid a^i_j = a^j_i\}$.

1.3.38. Кососимметрические матрицы $\{(a^i_j) \mid a^i_j = -a^j_i\}$.

1.3.39. Для $k = \mathbb{C}$ эрмитовы матрицы $\{(a^i_j) \mid a^i_j = \overline{a^j_i}\}$.

1.3.40. Для $k = \mathbb{C}$ косоэрмитовы матрицы $\{(a^i_j) \mid a^i_j = -\overline{a^j_i}\}$.

1.3.41. Являются ли два последних множества пространствами над $\mathbb{R}$?

1.3.42. Ортогональные матрицы $\{M \mid M^t = M^{-1}\}$ (O_n).

1.3.43. Симплектические матрицы $\{M \mid MJM^t = J\}$, где

$$J = \begin{pmatrix} & & & & & 1 \\ & 0 & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & & & 1 & & \\ & & -1 & & & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & 0 & \\ -1 & & & & & \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad n \text{ – четно.}$$

1.3.44. Матрицы, коммутирующие с J, где J как и выше.

1.3.45. $\{M \mid MJ + JM^t = 0\}$, где J как и выше.

1.3.46. Матрицы, у которых невырождены заданные несколько миноров.