§2. Линейные подпространства и отображения

В этом разделе мы рассматриваем явные способы задания подпространств в n-мерном векторном пространстве V с фиксированным базисом $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ и связанными с ним координатами $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Возникающие при этом понятия линейного функционала, сопряженного пространства и линейного отображения являются ключевыми в линейной алгебре.

2.1. Линейные оболочки. Линейная оболочка векторов $M \subset V$ обозначается символом $\langle M \rangle_{\text{лин}}$ и может быть определена тремя способами:

— как наименьшее по включению подпространство в V, содержащее множество M;

— как пересечение всех подпространств, содержащих M;

— как множество всевозможных линейных комбинаций вида

$$v = \lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 + \cdots + \lambda_k m_k; \qquad \lambda_i \in k; \quad m_i \in M.$$

2.1.1. Докажите, что все три способа корректно определяют одно и тоже подпространство в V.

Простейший способ задания подпространства $W \subset V$ состоит в описании его как линейной оболочки набора векторов $\{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$ называемых образующими: $W = \langle w_1, \ldots, w_k \rangle_{\text{лин}}$. Такое представлене W полностью определяется заданием $n \times k$-матрицы (w_j^i) из столбцов координат образующих векторов w_j в фиксированном нами базисе пространства V.

2.1.2. Укажите алгоритм, позволяющий по заданной матрице (w_j^i) из столбцов координат образующих векторов подпространства W определить размерность этого подпространства и построить в нем какой-либо базис.

(Указание: элементарные преобразования столбцов матрицы (w_j^i) соответствуют линейным заменам образующих w_j, за которыми можно проследить; с другой стороны, они позволяют привести матрицу к ступенчатому виду, а в этом случае ответить на оба вопроса несложно.)

2.1.3. Найдите базис и размерность суммы и пересечения подпространств $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle_{\text{лин}}$ и $\langle b_1, b_2, b_3 \rangle_{\text{лин}}$, где:

(а) $a_1 = (1,1,1,1)^t$, $a_2 = (1,-1,1,-1)^t$, $a_3 = (1,3,1,3)^t$,
$b_1 = (1,2,0,2)^t$, $b_2 = (1,2,1,2)^t$, $b_3 = (3,1,3,1)^t$.

(б) $a_1 = (1,1,0,0)^t$, $a_2 = (0,1,1,0)^t$, $a_3 = (0,0,1,1)^t$,
$b_1 = (1,0,1,0)^t$, $b_2 = (0,2,1,1)^t$, $b_3 = (1,2,1,2)^t$.

2.2. Размерности подпространств.

2.2.4. Пусть $U, V \subset W$ — два подпространства. Выразите $\dim(U+V)$ через $\dim U$ и $\dim V$.

2.2.5. Получите точную оценку снизу для $\dim(U \cap V)$ через $\dim U$, $\dim V$ и $\dim W$.

2.2.6. Докажите, что если $\dim(U+V) = \dim(U \cap V) + 1$, то $U+V$ равно одному из подпространств U, V, а $U \cap V$ — другому.

2.2.7. Пусть $W_1, W_2, \ldots, W_m$ — набор k-мерных подпространств в V, таких что $\dim(W_i \cap W_j) = (k-1)\ \forall i, j$. Докажите, что либо все W_j содержат общее $(k-1)$-мерное подпространство, либо содержатся в одном общем $(k+1)$-мерном подпространстве.

2.3. Линейные функционалы. Функция $\varphi : V \mapsto k$ называется линейным функционалом, если для любых $v_1, v_2 \in V$ и для любых $\lambda_1, \lambda_2 \in k$

$$\varphi(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 \varphi(v_1) + \lambda_2 \varphi(v_2).$$

Как и все функции, линейные функционалы можно поточечно складывать и умножать на числа.

2.3.8. Докажите, что линейные функционалы образуют векторное пространство над k (оно обозначается V^* и называется *сопряженным* или *двойственным* к V.)

2.3.9. Докажите, что координатные функции $x^1, x^2, \ldots, x^n$ (x^j сопоставляет вектору v его j-тую координату в фиксированном базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$) составляют базис в V^* (он называется базисом *сопряженным* или *двойственным* к базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$ в V). Найдите значения $x^i(e_j)$. Другая формулировка этой задачи: функция $\varphi : V \mapsto k$ тогда и только тогда является линейным функционалом, когда существуют константы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, такие, что действие φ на произвольный вектор $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^t$ задается формулой:

$$\varphi(v) = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum \varphi_j x^j$$

при этом $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ определяются по φ однозначно.

Обозначения. Элементы φ иногда называют ковекторами. Координаты ковекторов принято записывать в строчку и нумеровать нижними индексами, а сами ковекторы в семействе ковекторов — верхними индексами.

2.3.10. *Двойственность.* Докажите, что естественное отображение $V \mapsto (V^*)^*$, сопоставляющее вектору v функционал $\tilde{v}$, действующий на ковекторы $\varphi \in V^*$ по правилу: $\tilde{v}(\varphi) = \varphi(v)$, устанавливает изоморфизм между V и $(V^*)^*$. Какой базис пространства V является прообразом базиса $(V^*)^*$, сопряженного к базису $x^1, x^2, \ldots, x^n$ в V^* при этом изоморфизме и как выглядят в этом базисе-прообразе координаты вектора v, имевшего координаты $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ в исходном базисе $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ пространства V?

2.4. Задание подпространств уравнениями. Однородное линейное уравнение:

$$a_1 x^1 + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n = 0$$

следует воспринимать как соотношение $a(v) = 0$ на вектор $v \in V$ и ковектор $a \in V^*$ (где $v = (x^i)$ в фиксированном базисе пространства V, а $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ в двойственном базисе пространства V^*). Полезно отметить, что это соотношение при фиксированном $v \in V$ — является уравнением на пространстве V^* относительно неизвестных $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

2.4.11. Фиксируем $a \in V^*$. Докажите, что если $a \neq 0$, то решения $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^t$ однородного уравнения $a(v) = 0$ образуют $(n-1)$-мерное подпространство в V (оно обозначается $\operatorname{Ann} a$ и называется аннулятором a).

2.4.12. Фиксируем набор функционалов $a^1, a^2, \dots, a^k \in V^*$. Докажите, что решения системы однородных уравнений:

$$\begin{cases} a^1(v) &= 0 \\ a^2(v) &= 0 \\ \dots \\ a^k(v) &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sum a^1_j x^j &= 0 \\ \sum a^2_j x^j &= 0 \\ \dots \\ \sum a^k_j x^j &= 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a^i_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

составляют подпространство $W \subset V$. Докажите также, что $W = \cap \operatorname{Ann} \varphi$ по всем $\varphi \in \langle a^1, a^2, \dots, a^k \rangle_{\text{лин}} \subset V^*$.

2.4.13. Докажите, что любое подпространство $W \subset V$ может быть задано как множество решений системы линейных однородных уравнений (как в предыдущей задаче) и что при этом

$$\dim W = \dim V - \dim \langle a^1, a^2, \dots, a^k \rangle_{\text{лин}}$$

Если в пространстве V фиксирован базис, то система уравнений, задающих данное подпространство W вполне определяется матрицей размера $k \times n$ (называемой матрицей системы), по строкам которой стоят координаты ковекторов $a^1, a^2, \dots, a^k$, участвующих в уравнениях, в сопряженном базисе пространства V^*.

2.4.14. Укажите алгоритм, позволяющий по матрице системы уравнений, задающих подпространство $W \subset V$, определить:

(а) минимальное число уравнений, необходимых для задания W и явный вид этих уравнений;

(б) размерность и базис пространства W.

Указание: в первом пункте речь идет о нахождинии $\dim \langle a^1, a^2, \dots, a^k \rangle_{\text{лин}}$ и базиса в этом пространстве (ср. с зад. 4.0.3 и зад. 1.0.2; надо воспользоваться элементарными преобразованиями строк и привести матрицу к ступенчатому виду).

2.4.15. Укажите алгоритм, позволяющий по матрице (w^i_j) из столбцов координат векторов $w_1, w_2, \dots, w_k \in V$ составить минимальную систему уравнений, задающих подпространство $\langle w^1, w^2, \dots, w^k \rangle_{\text{лин}}$.

Указание: эта задача сводится к предыдущей, если рассмотреть $w_1, w_2, \dots, w_k \in V$ как функционалы на V^*.

2.4.16. Найдите систему линейных уравнений, задающих линейную оболочку $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle_{\text{лин}}$, где

(а) $a_1 = (1, -1, 1, 0)^t$; $\quad a_2 = (i, 1, 0, 1)^t$; $\quad a_3 = (2, 0, 1, 1)^t$

(б) $a_1 = (1, -1, 1, -1, 1)^t$; $\quad a_2 = (1, 1, 0, 0, 3)^t$; $\quad a_3 = (3, 1, 1, -1, 7)^t$

2.4.17. Рассмотрим в k^n подпространство L_0, заданное уравнением $x^1 + x^2 + \dots = x^n = 0$, и подпространство L_1, заданное системой уравнений: $x^1 = x^2 = \dots = x^n$. Докажите, что

$k^n = L_0 \oplus L_1$ и найдите координаты векторов-проекций стандартных базисных векторов в k^n на каждое из этих подпространств вдоль другого подпространства.

2.4.18. Рассмотрим в k^4 подпространства:

$$L_0 = \langle (1,1,1,1)^t, (-1,-2,0,1)^t \rangle_{\text{лин}},\ L_1 = \langle (-1,-1,1,-1)^t, (2,2,0,1)^t \rangle_{\text{лин}}$$

Докажите, что $k^4 = L_0 \oplus L_1$ и найдите проекцию вектора $(4,2,4,4)^t$ на L_0 вдоль L_1.

2.5. Линейные операторы. Отображение $f : V \mapsto W$ называется *линейным оператором*, если для любых $v_1, v_2 \in V$ и $\lambda_1, \lambda_2 \in k$

$$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2).$$

Частными случаями линейных операторов являются линейные функционалы: для них $W = k$.

2.5.19. Докажите, что линейные операторы из n-мерного пространства V в m-мерное пространство W образуют mn-мерное векторное пространство (оно обозначается $\mathrm{Hom}(V,W)$). Докажите, что если в V выбрать базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$, а в W — базис $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$, то отображения f^i_j, действующие на вектор $v \in V$ по правилу $f^i_j(v) = x^i(v)\xi_j$, будут линйными и составляют базис пространства $\mathrm{Hom}(V,W)$.

Матрицей линейного оператора $f : V \mapsto W$ в базисах $e_1, e_2, \ldots, e_n$ пространства V и $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ пространства W называется матрица $C_f = (f(e_j)^i)$, по столбцам которой стоят координаты образов $f(e_j)$ базисных векторов e_j пространства V в базисе $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ пространства W.

2.5.20. Докажите, что сопоставление оператору его матрицы является изоморфизмом пространства $\mathrm{Hom}(V,W)$ и пространства матриц размера $(\dim W) \times (\dim V)$. Найдите матрицы операторов f^i_j из предыдущей задачи.

2.5.21. Докажите, что матрица композиции операторов равна произведению матриц:

$$C_{f \circ g} = C_f C_g,$$

где $f : V_2 \mapsto V_3$, $g : V_1 \mapsto V_2$, $f \circ g : V_1 \mapsto V_3$, и при сопоставлении f и g матриц используется один и тот же базис в пространстве V_2.

2.5.22. Докажите, что координаты (y^i) образа $f(v)$ в базисе $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ пространства W могут быть найдены по координатам (x^i) вектора v в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ пространства V по формуле:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = C_f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

где C_f — матрица линейного оператора f в базисах $\{e_j\}$, $\{\xi_j\}$. Вывести из предыдущих двух задач все результаты о матрицах перехода из зад. 2.0.2.

2.5.23. Фиксируем базисы $\{e_j\}$ в V и $\{\xi_j\}$ в W, и пусть $\{v_j\}$ — другой базис в V, а $\{\eta_j\}$ — другой базис в W. Пусть C_{ev} и $C_{\xi\eta}$ — соответствующие матрицы перехода. Докажите, что матрица C'_f оператора f в базисах $\{v_j\}, \{\eta_j\}$ связана с матрицей C_f оператора f в базисах $\{e_i\}, \{\xi_i\}$ формулами:

$$C'_f = C_{\eta\xi} C_f C ev = C^{-1}_{\xi\eta} C_f C_{ev} = C_{\eta\xi} C_f C^{-1}_{ve}$$

2.5.24. Пусть $f : V \mapsto W$ —линейный оператор и C_f его матрица в некоторых фиксированных базисах. Докажите, что

$$\operatorname{im} f = \{w \in W | \exists v \in V : \ f(v) = w\} \subset W$$

является подпространством в W и совпадает с линейной оболочкой векторов, координаты которых стоят по столбцам C_f.

2.5.25. Докажите, что в условиях предыдущей задачи

$$\ker f = \{v \in V : | f(v) = 0\} \subset V$$

является подпространством в V и задается системой уравнений с матрицей C_f.

2.5.26. Докажите, что для любого $f : V \mapsto W$ имеется равенство:

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{im} f = \dim V$$

.

2.5.27. Сопоставим оператору $f : V \mapsto W$ оператор $f^* : W^* \mapsto V^*$ (он называется *двойственным* к f), переводящий функционал $\varphi \in W^*$ в функционал $f^*\varphi \in V^*$, действующий на векторы $v \in V$ по правилу $f^*\varphi(v) = \varphi(f(v))$. Докажите, что это сопоставление корректно, является линейным оператором из $\operatorname{Hom}(V, W)$ в $\operatorname{Hom}(W^*, V^*)$ и устанавливает изоморфизм между этими пространствами.

2.5.28. Как связаны между собой матрица C_f в некоторых базисах и матрица C_{f^*} в сопряженных базисах?

2.6. Приложение: теория линейных уравнений. Все вышесказанное может быть переформулировано на языке линейных уравнений.

2.6.29. *Теорема о ранге.* Пусть M — произвольная матрица размера $k \times n$ (k строк и n столбцов). Докажите, что следующие три числа равны (каждое из них называется *рангом* матрицы M и обозначается $\mathrm{rk}M$):

— размерность линейной оболочки столбцов матрицы M в k^n;
— размерность линейной оболочки строк матрицы M в k^n;
— порядок максимального ненулевого минора матрицы M.

2.6.30. *Теорема об окоймляющих минорах.* Пусть M — произвольная матрица, содержащая ненулевой минор порядка k. Докажите, что если все миноры порядка $k + 1$, содержащие данный, нулевые, то $\mathrm{rk}M = k$.

2.6.31. *Теорема Кронекера-Капелли.* Система линейных уравнений:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^1 x^j = b^1; \ \sum_{j=1}^{n} a_j^2 x^j = b^2; \ \ldots \ sum_{j=1}^n a_j^k x^j = b^k;$$

или в матричной записи:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}; \quad \left(A = (a_j^i)\right)$$

тогда и только тогда имеет решение, когда rk$A$ равен рангу расширенной матрицы системы, получающейся приписыванием к A справа столбца правых частей уравнений.

2.6.32. *Альтернатива Фредгольма.* Система линейных уравнений

$$A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$$

с квадратной матрицей A (это означает, что число уравнений равно числу неизвестных) либо имеет единственное решение при любой правой части $\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$, либо имеет бесконечно много решений при нулевой правой части и эти возможности исключают друг друга. Докажите это и объясните, какая из возможностей реализуется при $\det A = 0$ и при $\det A \neq 0$?