§6. Диаграммы и когомологии.

В этом разделе рассматриваются модули над коммутативным кольцом с единицей и гомоморфизмы между ними. Набор модулей и гомоморфизмов может быть представлен диаграммой:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "\gamma"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & W \\ & L \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} W \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\delta"'] & V' \arrow[d, "\beta"] \\ V \arrow[r, "\gamma"] & W' \end{tikzcd}$$

треугольник квадрат

Определение. Треугольник, изображенный на рисунке, называется коммутативным, если $\beta \circ \alpha = \gamma$, и антикоммутативным, если $\beta \circ \alpha = -\gamma$. Аналогично, квадрат называется коммутативным, если $\beta \circ \alpha = \delta \circ \gamma$, и антикоммутативным, если $\beta \circ \alpha = -\delta \circ \gamma$.

6.1. Коммутативные и антикоммутативные треугольники.

Для коммутативного и антикоммутативного треугольника, изображенного на рисунке, доказать следующие импликации.

6.1.1. (α и β — мономорфизмы) $\Longrightarrow$ (γ — мономорфизм).

6.1.2. (α и β — эпиморфизмы) $\Longrightarrow$ (γ — эпиморфизм).

6.1.3. Если α — изоморфизм, то
- **(а)** (β — эпиморфизмы) $\Longleftrightarrow$ (γ — эпиморфизм);
- **(б)** (β — мономорфизмы) $\Longleftrightarrow$ (γ — мономорфизм).

6.1.4. Если β — изоморфизм, то
- **(а)** (α — мономорфизмы) $\Longleftrightarrow$ (γ — мономорфизм);
- **(б)** (α — эпиморфизмы) $\Longleftrightarrow$ (γ — эпиморфизм).

6.1.5. (γ — мономорфизмы) $\Longrightarrow$ (α — мономорфизм) . Верна ли импликация: (γ — мономорфизмы) $\Longrightarrow$ (β — мономорфизм) ?

6.1.6. (γ — эпиморфизмы) $\Longrightarrow$ (β — эпиморфизм) . Верна ли импликация: (γ — эпиморфизмы) $\Longrightarrow$ (α — эпиморфизм)?

6.1.7. (γ — изоморфизмы) $\Longrightarrow$ (α — мономорфизм и β — эпиморфизм) . Верно ли обратное?

6.2. Коммутативные квадраты.

6.2.8. Для коммутативного и антикоммутативного квадрата, изображенного на рисунке докажите, что
- **(а)** если γ и δ — эпиморфизмы, то и β — эпиморфизм;
- **(б)** если γ и δ, то и α — вложение.

6.3. Точные последовательности.

Определение. Последовательность модулей и гомоморфизмов

$$\cdots V_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} V_i \xrightarrow{\varphi_i} V_{i+1} \cdots$$

называется точниой, если $\ker \varphi_i = \operatorname{im} \varphi_{i-1}$ для каждого i.

Таким образом, последовательность

$$0 \longrightarrow V \xrightarrow{\varphi} W$$

точна тогда и только тогда, когда φ — вложение, а последовательность

$$V \xrightarrow{\varphi} W \longrightarrow 0$$

точна тогда и только тогда, когда φ — наложение.

Последовательность

$$0 \longrightarrow V' \xrightarrow{\alpha} V \xrightarrow{\beta} V'' \longrightarrow 0$$

является точной, если α — мономорфизм, β — эпиморфизм и $\operatorname{im}\alpha = \ker\beta$. Такая последовательность называется короткой точной последовательностью или точной тройкой.

6.3.9. Докажите, что если V, V' и V'' в написанной выше точной тройке — векторные пространства над полем, то

$$\dim V = \dim V' + \dim V''.$$

6.3.10. Пусть в следующей диаграмме оба квадрата антикоммутативны, а строки — точные тройки:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & V' & \longrightarrow & V & \longrightarrow & V'' & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle f'}\downarrow & & {\scriptstyle f}\downarrow & & {\scriptstyle f''}\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & W' & \longrightarrow & W & \longrightarrow & W'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

(а) Докажите, что если f — изоморфизм, то f' — мономорфизм, а f'' — эпиморфизм. Верно ли обратное?

(б) Докажите, что если f' и f'' — изоморфизмы, то f также изоморфизм.

(в) Верны ли предыдущие утверждения при условии коммутативности обоих квадратов?

6.3.11. Для коммутативной диаграммы (то есть каждый квадрат в ней коммутативен) с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & V' & \xrightarrow{\alpha} & V & \longrightarrow & V'' \\ & & & & {\scriptstyle f}\downarrow & & {\scriptstyle f''}\downarrow \\ 0 & \longrightarrow & W' & \xrightarrow{\beta} & W & \longrightarrow & W'' \end{array}$$

(а) Докажите, что существует единственный гомоморфизм модулей $f' : V' \longrightarrow W'$, удовлетворяющий соотношению: $\beta \circ f' = f \circ \alpha$.

(б) При каких дополнительных условиях на отображения диаграммы можно гарантировать мономорфность f'?

6.3.12. Для антикоммутативной диаграммы с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} V' & \longrightarrow & V & \xrightarrow{\alpha} & V'' & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & {\scriptstyle f}\downarrow & & & & \\ W' & \longrightarrow & W & \xrightarrow{\beta} & W'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

(а) Докажите, что существует единственный гомоморфизм модулей $f'' : V'' \longrightarrow W''$, удовлетворяющий соотношению: $-\beta \circ f = f'' \circ \alpha$.

(б) При каких дополнительных условиях на отображения диаграммы можно гарантировать эпиморфность f''?

6.3.13. Дана коммутативная диаграмма с точными строками и столбцами

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & L' & & L & & L'' & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & V' & \longrightarrow & V & \longrightarrow & V'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & W' & \longrightarrow & W & \longrightarrow & W'' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

(а) Докажите, что существуют гомоморфизмы модулей $\alpha : L \longrightarrow L'$ и $\beta : L' \longrightarrow L''$, при которых диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & L' & \xrightarrow{\alpha} & L & \xrightarrow{\beta} & L'' & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & V' & \longrightarrow & V & \longrightarrow & V'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & W' & \longrightarrow & W & \longrightarrow & W'' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

коммутативна.

(б) Докажите, что верхняя строчка данной диаграммы

$$0 \longrightarrow L' \xrightarrow{\alpha} L \xrightarrow{\beta} L''$$

точна.

(в) Доказать, что если f' — эпиморфизм, то β — тоже эпиморфизм.

(г) Останутся ли верными утверждения задачи при антикоммутативных малых квадратах?

6.3.14. Сформулировать и доказать аналогичное утверждение о коммутативной или антикоммутативной диаграмме вида

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & V' & \longrightarrow & V & \longrightarrow & V'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & W' & \longrightarrow & W & \longrightarrow & W'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & C' & & C & & C'' & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

с точными строками и столбцами.

6.3.15. Пусть в коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & K_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & K_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & K_3 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & V_1 & \longrightarrow & V_2 & \longrightarrow & V_3 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & W_1 & \longrightarrow & W_2 & \longrightarrow & W_3 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & C_1 & \xrightarrow{\beta_1} & C_2 & \xrightarrow{\beta_2} & C_3 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

все строки и столюбцы точны. Докажите, что существует естественное отображение $\delta : K_3 \longrightarrow C_1$, причем $\operatorname{im}\alpha_2 = \ker\delta$ и $\operatorname{im}\delta = \ker\beta_1$, то есть последовательность

$$0 \longrightarrow K_1 \xrightarrow{\alpha_1} K_2 \xrightarrow{\alpha_2} K_3 \xrightarrow{\delta} C_1 \xrightarrow{\beta_1} C_2 \xrightarrow{\beta_2} C_3 \longrightarrow 0$$

точна.

Наряду с ядром и образом гомоморфизма модулей $\alpha : V \longrightarrow W$ можно построить третий модуль, не лежащий ни в V ни в W.

Определение. *Коядром* гомоморфизма $\alpha : V \longrightarrow W$ называется модуль $\operatorname{coker}\alpha = W/\operatorname{im}\alpha$ с естественной проекцией $\pi : V \longrightarrow \operatorname{coker}\alpha$.

6.3.16. Докажите, что по любому гомоморфизму модулей $\alpha : V \longrightarrow W$ можно построить точную последовательность

$$0 \longrightarrow \ker\alpha \longrightarrow V \xrightarrow{\alpha} W \xrightarrow{\pi} \operatorname{coker}\alpha \longrightarrow 0.$$

6.3.17. *Лемма о змее.* Любая коммутативная диаграмма вида

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & V_1 & \longrightarrow & V_2 & \longrightarrow & V_3 & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle f_1}\downarrow & & {\scriptstyle f_2}\downarrow & & {\scriptstyle f_3}\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & W_1 & \longrightarrow & W_2 & \longrightarrow & W_3 & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

с точными строками достраивается до коммутативной диаграммы с точными строками и столбцами:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \ker f_1 & \longrightarrow & \ker f_2 & \longrightarrow & \ker f_3 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & V_1 & \longrightarrow & V_2 & \longrightarrow & V_3 & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle f_1}\downarrow & & {\scriptstyle f_2}\downarrow & & {\scriptstyle f_3}\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & W_1 & \longrightarrow & W_2 & \longrightarrow & W_3 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \operatorname{coker} f_1 & \longrightarrow & \operatorname{coker} f_2 & \longrightarrow & \operatorname{coker} f_3 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array},$$

причем верхняя и нижняя строчки объединяются в одну точную последовательность:

$$0 \longrightarrow \ker f_1 \longrightarrow \ker f_2 \longrightarrow \ker f_3 \longrightarrow \mathrm{coker} f_1 \longrightarrow \mathrm{coker} f_2 \longrightarrow \mathrm{coker} f_3 \longrightarrow 0.$$

6.3.18. *Лемма о пяти гомоморфизмах.* Пусть дана коммутативная диаграмма с точными строками

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & {\scriptstyle\beta}\downarrow & & {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & {\scriptstyle\gamma}\downarrow & & {\scriptstyle\delta}\downarrow \\ A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & E' \end{array}$$

Докажите, что если α, β, γ и δ — изоморфизмы, то и φ — изоморфизм.

6.3.19. Пусть $\varphi : V \longrightarrow W$ — линейное отображение векторных пространств, V^* и W^* — двойственные пространства. Докажите, что

(а) Отображение, ставящее функции $f \in W^*$ функцию на V, определяемую правилом $\varphi^* f(v) = f(\varphi(v))$, — корректно заданное линейное отображение $\varphi^* : W^* \longrightarrow V^*$.

(б) $(\varphi^*)^* = \varphi$.

(в) (φ^* — эпиморфизм) $\Leftrightarrow$ (φ — ммономорфизм).

(г) Последовательность

$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{\varphi} V_2 \xrightarrow{\psi} V_3 \longrightarrow 0$$

векторных пространств точна тогда и только тогда, когда точна двойственная последовательность:

$$0 \longrightarrow V_3^* \xrightarrow{\psi^*} V_2^* \xrightarrow{\varphi^*} V_1^* \longrightarrow 0$$

(д) Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\alpha} & W \\ {\scriptstyle\gamma}\downarrow & & {\scriptstyle\beta}\downarrow \\ L & \xleftrightarrow{\mathrm{id}_L} & L \end{array}$$

коммутативна тогда и только тогда, когда коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} V^* & \xleftarrow{\alpha^*} & W^* \\ {\scriptstyle\gamma^*}\uparrow & & {\scriptstyle\beta^*}\uparrow \\ L^* & \xleftrightarrow{\mathrm{id}_{L^*}} & L^* \end{array}$$

6.3.20. Как изменятся условия предыдущей задачи, если векторные пространства заменить на модули над коммутативным кольцом K, а двойственным модулем к V считать по определению $\mathrm{Hom}(V, K)$?

6.4. Комплексы и когомологии.

Определение. *Комплексом* $A^\bullet$ набор модулей $A^i \quad i \in \mathbb{Z}$ и гомоморфизмов $d^i : A^i \longrightarrow A^{i+1}$, называемых *дифференциалами* таких, что $d^{i+1} \circ d^i = 0$. Вообще говоря, модули A^i могут быть отличны от нуля только для некоторого подмножества индексов, например для $i \geq 0$.
Морфизмом комплексов $f : A^\bullet \longrightarrow B^\bullet$ называется набор гомоморфизмов $f : A^i \longrightarrow B^i$ для каждого i, которые коммутируют с дифференциалами: $f^{i+1} \circ d^i = d^{i+1} \circ d^i$.
Когомологии $h^i(A^\bullet)$ комплекса $A^\bullet$ определяются как фактормодули $(\ker d^i)/(\mathrm{im}\, d^{i-1})$.

6.4.21. Докажите, что всякий морфизм комплексов $f : A^\bullet \longrightarrow B^\bullet$ индуцирует естественное отображение $h^i(f) : H^i(A^\bullet) \longrightarrow h^i(B^\bullet)$.

6.4.22. Пусть

$$0 \longrightarrow A^\bullet \xrightarrow{f} B^\bullet \xrightarrow{g} C^\bullet \longrightarrow 0$$

точная последовательность комплексов (то есть

$$0 \longrightarrow A^i \xrightarrow{f^i} B^i \xrightarrow{g^i} C^i \longrightarrow 0$$

короткая точная последовательность). Докажите, что существует набор естественных отображений:

$$h^i(C^\bullet) \xrightarrow{\delta^i} h^{i+1}(A^\bullet),$$

таких что имеет место длинная точная когомологическая последлвательность

$$\cdots \to h^i(A^\bullet) \longrightarrow h^i(B^\bullet) h^i(C^\bullet) \xrightarrow{\delta^i} h^{i+1}(A^\bullet) \to 0 \cdots .$$

Определение. Два морфизма комплексов называются *гомотопными*, если существует набор гомоморфизмов $k^i : A^i \longrightarrow B^{i-1}$ для каждого $i \in \mathbb{Z}$ (необязательно коммутирующих с дифференциалами), таких что $f^i - g^i = d^{i+1} \circ k^i + k^{i+1} \circ d^i$. Набор гомоморфизмов k^i называется *оператором гомотопии.*

6.4.23. Докажите, что гомотопные морфизмы комплексов индуцируют один и тот же набор гомоморфизмов когомологий

$$h^i(A^\bullet) \longrightarrow h^i(B^\bullet).$$

Определение. Пусть дан конечный комплекс конечномерных векторных пространств $V^\bullet$. *Эйлеровой характеристикой* этого комплекса $(\chi(V^\bullet))$ называется число

$$\sum (-1)^i \dim V^i.$$

6.4.24. Докажите, что для любого конечного комплекса его Эйлерова характеристика совпадает с числом $\sum (-1)^i \dim h^i(V^\bullet)$.