§8. Операторы в пространствах со скалярным произведением.

Всюду ниже речь идет об операторах $A : V \longrightarrow V$ в пространстве со скалярным произведением $v,w \mapsto (v,w)$. При этом, если специально не оговаривается противное, всегда имеется ввиду оба возможных здесь случая: V — вещественно и скалярное произведение евклидово и V — комплексно и скалярное произведение эрмитово, и Ваши решения должны быть пригодны для обоих случаев.

Через $W^\perp$ мы всегда обозначаем ортогональное дополнение к пространству $W \subset V$, так что $W^\perp = \{v \in V | (v,w) = 0 \quad \forall w \in W\}$. Знак $\oplus$ обозначает прямую, но не обязательно ортогональную сумму.

8.1. Сопряжение операторов.

8.1.1. Докажите, что для любого оператора $a : V \longrightarrow V$ существует единственный оператор $a^* : V^* \longrightarrow V^*$ такой, что $(v, Aw) = (A^*v, w)$ и $(Av, w) = (v, A^*w) \qquad \forall v,w \in V$. Выразите матрицу a^* в произвольном базисе пространства V через матрицу A в этом базисе и матрицу Грама этого базиса.

8.1.2. Докажите, что:

(а) $(\lambda A + \mu B)^* = \bar{\lambda}A^* + \bar{\mu}B^*$;

(б) $(AB)^* = B^*A^*$;

(в) $(A^*)^* = A$;

(г) $\exp(A^*) = (\exp(A))^*$.

8.1.3. Докажите, что для любого оператора A операторы A^*A и AA^* самосопряженны и неотрицательны (оператор B называется *самосопряженным*, если $B^* = B$, и неотрицательным, если $(Bv, v) \geq 0 \quad \forall v$). Докажите, что они положительны тогда и только тогда, когда A обратим.

8.1.4. Докажите, что A тогда и только тогда изометричен (то есть сохраняет скалярное произведение), когда $A^* = A^{-1}$.

8.1.5. Докажите, что $(\ker A)^\perp = \operatorname{im} A^*$.

8.1.6. Пусть $V = V_1 \oplus V_2$ и A проектирует V на V_1 вдоль V_2. Докажите, что тогда $V = V_1^\perp \oplus V_2^\perp$ и A^* проектирует V на $V_2^\perp$ вдоль $V_1^\perp$.

8.1.7. Докажите, что ортогональные дополнения к инвариантным подпространствам оператора A инвариантны относительно A^*.

8.1.8. Докажите, что приводимые ниже численные характеристики операторов A и A^* переводятся друг в друга комплексным сопряжением:

(а) набор собственных значений,

(б) минимальный многочлен,

(в) собственное значение общего собственного вектора (если такой, конечно, имеется!).

8.1.9. Теорема Шура. Докажите, что в комплексном эрмитовом пространстве произвольный оператор может быть представлен верхнетреугольной матрицей в некотором ортонормированном базисе.(В частности, у него имеются инвариантные подпространства любой промежуточной размерности между 0 и $\dim V$.)

8.2. Примеры сопряженных операторов.

8.2.10. Пусть V подпространство в $C^\infty\mathbb{R}$, состоящеех из периодических функций с периодом $T > 0$, со скалярным произведением:

$$(f, g) = \int\limits_0^T f(x)g(x)dx.$$

Докажите, что операторы $\dfrac{d}{dx}$ и умножения на фиксированную функцию из V линейны и переводят V в V. Вычислите сопряженные к ним операторы.

8.2.11. В условиях предыдущей задачи вычислите сопряженный к произвольному дифференциальному оператору

$$L = a_k(x)\frac{d^k}{dx^k} + a_{k-1}(x)\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} + \cdots a_1(x)\frac{d}{dx} + a_0(x)$$

с коэффициентами $a_0, a_1, \cdots, a_k$ из V. (Указание: примените зад. 1.0.2 и зад. 2.0.1.)

8.2.12. В условиях предыдущей задачи заменим V на $C^\infty[0,1]$ и потребуем, чтобы коэффизиенты $a_0, a_1, \cdots, a_k$ обращались на концах отрезка в нуль вместе с производными. Как изменится ответ?

8.2.13. Докажите, что оператор

$$L = \sin^2\frac{2\pi x}{T}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\pi}{T}\cos\frac{4\pi x}{T}\frac{d}{dx}$$

самоспряжен на пространстве из зад. 2.0.1.

8.2.14. Докажите, что оператор

$$L = x^2(x-1)^2\frac{d^2}{dx^2} + 2x(x-1)\frac{d}{dx}$$

самосопряжен на пространстве из зад. 2.0.3.

8.2.15. Рассмотрим на $\mathbb{R}[x]$ скалярное произведение $(f, g) = \int\limits_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$ и для любого $K[x, y] \in \mathbb{R}[x, y]$ рассмотрим оператор

$$f(t) \mapsto \int\limits_{-1}^{1} K(s,t)f(t)dt$$

Найдите сопряженный к нему.

8.2.16. Проверьте, что если в предыдущей задаче взять $K(x, y) = xy$, то получится самосопряженный оператор, причем многочлены Лежандра будут для него ортогональным базисом из собственных векторов.

8.2.17. Введем на $\mathbb{R}[x, y, z]$ скалярное произведение, полагая базисные мономы $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ попарно ортогональными и имеющими скалярные квадраты, равные $\alpha!\beta!\gamma!$. Найдите оператор, сопряженный оператору Лапласса $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. (Указание: найдите сначала сопряженные операторы к $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ и $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$, рассмотрев их действие на базис, а затем примените зад. 1.0.2.

8.2.18. Пусть P_m — пространство однородных многочленов от трех переменных степени m, H_m — подпространство гармонических многочленов

$$H_m = \{f(x, y, z)|\Delta f \equiv 0\}$$

и пусть R^2 "квадрат радиус-вектора" — многочлен из P^2, равный $x^2 + y^2 + z^2$. Выведите из предыдщщей задачи, что

$$P_m = H_m \oplus R^2 H_{m-2} \oplus R^4 H_{m-4} \oplus \cdots$$

(На самом деле Вы получили здесь разложение пространства однородных многочленов в прямую сумму минимальных подпространств, инвариантных относительно действия всех вращений SO_3 трехмерного пространства. Естественное действеие φ на функцию $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ состоит в замене переменного $\varphi : f \mapsto \varphi f \quad (\varphi f(v) = f(\varphi^{-1}v).)$

8.3. Нормальные операторы.

Оператор $A : V \longrightarrow V$ называется *нормальным*, если $A^*A = A^*A$. Это замечательный класс операторов.

8.3.19. Докажите, что нормальный оператор тогда и только тогда перестановочен с неким оператором B, когда он перестановочен с B^*.

8.3.20. Докажите, что для нормальности A необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall v \in V \quad \|Av\| = \|A^*v\|$$

.

8.3.21. Докажите, что собственные векторы нормального оператора с разными собственными значениями ортогональны.

8.3.22. Докажите, что ортогональное дополнение к собственному вектору нормального оператора будет инвариантно относительно этого оператора.

8.3.23. Характеризация нормальных операторов. Докажите, что следующие условия на оператор $A : V \longrightarrow V$ равносильны друг другу:

(а) A — нормален;

(б) A имеет диагональный вид в некотором ортогональном базисе;

(в) всякий собственный вектор для A собственен и для A^*;

(г) ортогональное дополнение к любому A-инвариантному подпространству также A-инвариантно.

(д) всякое A-инвариантное подпространство также и A^*-инвариантно.

Важное замечание. В случае вещественного пространства утверждения зад. 3.0.5(б) и зад. 3.0.5(в) о собственных векторах относятся к комплексифицированному пространству $V_{\mathbb{C}}$ и к комплексификации оператора A и евклидовой структуры $(.,.)$ (то есть к их естественному продолжению на $V_{\mathbb{C}}$). Это продолжение задается формулами:

$$V_{\mathbb{C}} = \{v_1 + \mathrm{i}v_2| \quad v_1, v_2 \in V\}$$

$$A_{\mathbb{C}}(v_1 + \mathrm{i}v_2) = A(v_1) + \mathrm{i}A(v_2)$$

$$(v_1 + \mathrm{i}(v_2), w_1 + \mathrm{i}w_2)_{\mathbb{C}} = (v_1, w_1) - (v_2, w_2) + \mathrm{i}(v_2, w_1) + \mathrm{i}(v_1, w_2),$$

при этом $(.,.)_{\mathbb{C}}$ — комплексно-билинейное евклидово (не эрмитово!) скалярное произведение.

8.3.24. Докажите, что любое множество попарно перестановочных нормальных операторов одновременно приводится к диагональному виду в некотором ортонормированном базисе.

8.3.25. Докажите, что в области нормальных операторов (в комплексном эрмитовом пространстве) уравнение $X^k = A$ разрешимо при любом натуральном k и нормальном операторе A. Найдите количество решений этого уравнения.

8.4. Самосопряженные и кососимметричные операторы.

8.4.26. Оператор называется *кососимметричным*, если $A^* = -A$. Докажите, что матрица такого оператора в ортонормированном базисе — косоэрмитрова (она меняет знак при одновременном транспонировании и комплексном сопряжении).

8.4.27. Что можно сказать о матрице самосопряженного оператора в ортономированном базисе? Иногда самосопряженные операторы называют симметричными.

8.4.28. Докажите, что оба типа операторов нормальны, но нормальный оператор симметричен тогда и только тогда, когда все его собственные числа — вещественны, и кососимметричен, когда все его собственные числа чисто мнимы.

Важное замечание. Это показывает, что для самосопряженных операторов в вещественном евклидовом пространстве все замечательные свойства из зад. 3.0.5 выполнены безо всяких оговорок о комплексификации, тогда как для кососимметрического оператора эти оговорки существенны.

8.4.29. Докажите, что A симметричен тогда и только тогда, когда $\mathrm{i}A$ — кососимметричен.

8.4.30. Докажите, что самосопряженный оператор в вещественном евклидовом пространстве приводится к диагональному виду в некотором ортонормированном базисе.

8.4.31. Докажите, что кососимметричный оператор в вещественном евклидовом пространстве приводится в некотором ортонормированном базисе к блочно-диагональному виду, ненулевые блоки которого это 2×2-матрица вида

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix},$$

расположенные на главной диагонали.

8.4.32. Докажите, что произвольный оператор разлагается и при том единственным способом в сумму симметричного и кососимметричного, причем для нормальности оператора необходимо и достаточно, чтобы слагаемые этого рложения были перестановочны.

8.5. Изометрии.

Определение изометрии см в зад. 1.0.4. Изометрии евидова пространства принято называть it ортогоньными операторами, а изометрии эртова пространства — *унитарными операторами*

8.5.33. Докажите, что изометричный оператор сопряжен своему обратному. Какие выводы отсюда следуют о матрице изометрии в ортогональном и провоизльном басах?

8.5.34. Докажите, что изометрии обазруют группу по умножению (они называются, соответвенно, *ортогональной* и *унитарной* группами и обозначаются $O(V)$ и $U(V)$).

8.5.35. Докажите, что всякое теоретико-множественное отображение пространства в себя, сохраняющее скалярное произведение, является изометричным линейным изоморфизмом пстранства.

8.5.36. (Трудная.) Докажите, что изометрии составляют компактное подмножество в аффинном пртранстве всех операторов.

8.5.37. Докажите, что для существования изометрии, которая переводит набор векторов $v_1, v_2, \dots, v_k$ в набор $w_1, w_2, \dots, w_k$, необхимо и достаточно, совпадение матриц Грама этих наборов.

8.5.38. Докажите, что ортогональное дополнение к инвариантному подпространству изометрии также инвариантно и выведите отсюда, что изометричные операторы — нормальны.

8.5.39. Докажите, что собственные значения изометрий по модулю равны 1.

8.5.40. Пусть пространство $V_\mathbb{C}$ является комплексификацией вещественного пространства и изометрия задается в некотором базисе вещественной матрицей. Докажите, что если $v_1 + \mathrm{i}v_2$ — ее собственный вектор, соответствующий собственному значению $\alpha + \mathrm{i}\beta$, где v_1, v_2 — вещественные векторы, а α, β — вещественные числа, то двумерное подпространство, натянутое на v_1, v_2 отщепляется ортогональным инвариантным прямым слагаемым, а действие изометрии на нем в базисе v_1, v_2 задается матрицей:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

8.5.41. Докажите, что ортогональный оператор в евклидовом пространстве распадается в прямую сумму операторов, действующих на попарно- ортогональных друг другу инвариантных одно- или двумерных подпространствах, причем действие на одномерных подпространствах является умножением на ± 1, а на двумерных — поворотом.

8.5.42. Докажите, что всякая изометрия стандартного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ является поворотом вокруг некоторой прямой. Найдите эту прямую и угол поворота для преобразований:

(а) $\begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$;

(б) $\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/6 & 2\sqrt{2}/3 & \sqrt{2}/6 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

(убедитесь сначала, что они ортогональны).

8.6. Дополнительные задачи.

8.6.43. Докажите, что $O(V)$ порождается как абстрактная группа отражениями в гиперплоскостях (отражение в гиперплоскости H ортогональной вектору n единичной длины — это оператор $\sigma_H : v \mapsto v - 2(v, n)n$).

8.6.44. Докажите, что для любого унитарного оператора A в эрмитовом пространстве и любого натурального k существует унитарный оператор B, являющийся многочленом от A, и такой, что $B^k = A$.

8.6.45. Докажите, что любая унитарная матрица является произведением вещественной ортогональной и комплексной симметричной матриц.

8.6.46. *Преобразование Кэли.* Докажите, что отображение

$$K \longrightarrow (E - K)(E + K)^{-1}$$

устанавливает биекцию между множеством всех кососимметричных операторов и множеством изометрий, не имеющих собственного значения -1.

8.6.47. Докажите, что оператор K тогда и только тогда кососимметричен, когда оператор $\exp(K)$ — изометричен.

8.6.48. *Полярное разложение.* Докажите, что для любого невырожденного оператора A существуют разложения:

$$A = I_1 S_1 = S_2 I_2$$

где I_1, I_2 — изометрии, а S_1, S_2 — самосопряженные положительные операторы.

8.6.49. Найдите полярное разложение операторов:

(а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(б) $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

(в) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

8.6.50. Докажите, что множители полярного разложения определены по A однозначно (то есть соотвественные множители двух полярных разложений обязаны совпадать).

8.6.51. Докажите, что с точки зрения полярного разложения следующие условия равносильны:

(а) A — нормален;

(б) $I_1 = I_2$ и $S_1 = S_2$;

(в) I_1 и S_1 — перестановочны;

(г) I_2 и S_2 — перестановочны.