Введение

В 1995/96 учебном году в Независимом Московском Университете начал работу семинар «Алгебры Ли и их приложения». Настоящий сборник содержит задачи первых двух лет его работы. В этот период авторы (они же — руководители семинара) ставили перед собой задачу, говоря стандартным языком, «дать элементарное и современное введение в предмет», а по существу — по мере сил отобрать из современного джентльменского набора специалиста по алгебрам Ли то, что, с одной стороны, может быть наиболее легко понято студентами, а с другой — снабжает их основными методами этой науки. Для иллюстрации этих методов был выбран ряд приложений, которые волновали специалистов в семидесятых годах (тождества Макдональда) и продолжают волновать сегодня (интегрируемые системы многих тел).

Сборник охватывает классические основы теории нильпотентных, разрешимых и полупростых алгебр Ли, классификацию конечных систем корней, универсальные обертывающие алгебры, элементы теории когомологий алгебр Ли, введение в аффинные алгебры Каца – Муди, элементы теории представлений до формулы характеров Вейля – Каца включительно, а также вышеупомянутые приложения.

Источники, которыми мы пользовались при составлении задач, перечислены в списке литературы. Среди них имеются как классические монографии, так и журнальные статьи, в том числе не слишком известные. Каждая из последних попала в этот список по той причине, что с точки зрения авторов в ней настолько просто излагается какой-либо интересный вопрос, что эта статья вполне может быть разбита в последовательность задач для студентов.

1. Основные определения

Определение. *Алгеброй Ли над полем k* называется линейное пространство $\mathfrak{g}$ над k с дополнительной операцией, которая обозначается $[x, y]$, называется коммутированием и удовлетворяет условиям:

1) билинейность;

2) антисимметричность: $[x, y] = -[y, x]$ для всех $x, y \in \mathfrak{g}$;

3) тождество Якоби:

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$$

для всех $x, y, z \in \mathfrak{g}$.

1. Описать все (с точностью до изоморфизма) алгебры Ли размерности 1, 2 и 3 а) над полем $\mathbb{C}$; б) над полем $\mathbb{R}$.

2. Пусть A — ассоциативная алгебра. Положим $[x, y] = xy - yx$. Доказать, что эта операция вводит на A структуру алгебры Ли (иногда ее обозначают A_L). В частности, получаем следующие *классические* алгебры Ли (задачи *а–д*):

а) полная линейная алгебра $\mathfrak{gl}(V)$ — алгебра Ли всех линейных операторов в n-мерном пространстве V; она изоморфна алгебре Ли $\mathfrak{gl}(n)$ матриц порядка n;

б) специальная линейная алгебра $\mathfrak{sl}(n) := \{x \in \mathfrak{gl}(n) \mid \mathrm{tr}(x) = 0\}$;

в) ортогональная алгебра $\mathfrak{so}(n) := \{x \in \mathfrak{gl}(n) \mid x + x^t = 0\}$;

г) алгебры Ли над $\mathbb{R}$:
унитарная: $\mathfrak{u}(n) := \{x \in \mathfrak{gl}(n; \mathbb{C}) \mid x + x^* = 0\}$;
специальная унитарная: $\mathfrak{su}(n) := \mathfrak{u}(n) \cap \mathfrak{sl}(n)$;

д) симплектическая алгебра: пусть 1_n обозначает единичную матрицу порядка n. Положим

$$J_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\mathfrak{sp}(2n) := \{x \in \mathfrak{gl}(n) \mid x^t J_{2n} + J_{2n} x = 0\}$.

Назовем *алгеброй Гейзенберга* $\mathfrak{hei}(2n+1)$ алгебру Ли с базисом $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z$ и соотношениями $[z, x_i] = [z, y_i] = [x_i, x_j] = [y_i, y_j] = 0$; $[x_i, y_j] = \delta_{ij} z$ $\forall i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, n$.

Определение. *Линейным представлением* алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется гомоморфизм T алгебры $\mathfrak{g}$ в алгебру Ли $\mathfrak{gl}(V)$ для некоторого V. При этом $\dim V$ называется размерностью представления T.

Представление T называется *неприводимым*, если пространство V не содержит нетривиальных подпространств, инвариантных относительно всех операторов $T(x)$, $x \in \mathfrak{g}$.

Представление T называется *точным*, если $\operatorname{Ker} T = 0$.

Теорема Адо. *Любая конечномерная алгебра Ли обладает точным конечномерным представлением.*

3. Описать все неприводимые конечномерные представления

а) трехмерной алгебры Гейзенберга $\mathfrak{hei}(3)$;

б) алгебры Ли аффинных преобразований прямой $\mathfrak{aff}(1)$.

4. Указать точное конечномерное представление

а) n-мерной коммутативной алгебры Ли;

б) трехмерной алгебры Гейзенберга $\mathfrak{hei}(3)$;

в) $(2n+1)$-мерной алгебры Гейзенберга $\mathfrak{hei}(2n+1)$.

Определение. *Дифференцированием* алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется линейное отображение $D\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, удовлетворяющее условию $D[x, y] = [Dx, y] + [x, Dy]$ для любых $x, y \in \mathfrak{g}$.

5. Описать все дифференцирования (по модулю внутренних)

а) трехмерной алгебры Гейзенберга $\mathfrak{hei}(3)$;

б) $(2n+1)$-мерной алгебры Гейзенберга $\mathfrak{hei}(2n+1)$;

в) алгебры Ли аффинных преобразований прямой $\mathfrak{aff}(1)$;

г) $\mathfrak{sl}(2)$.

6. Пусть $\mathfrak{g}$ — произвольная алгебра Ли и $x \in \mathfrak{g}$. Обозначим через $\operatorname{ad} x$ линейный оператор в $\mathfrak{g}$, заданный формулой $(\operatorname{ad} x)y = [x, y]$. Доказать, что $\operatorname{ad} x$ является дифференцированием алгебры Ли $\mathfrak{g}$, что соответствие $x \mapsto \operatorname{ad} x$ является представлением $\mathfrak{g}$ в пространстве $\mathfrak{g}$ и что ядро этого представления совпадает с центром $\mathfrak{g}$.

Представление $x \mapsto \operatorname{ad} x$ называется *присоединенным представлением* алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

7. Найти алгебры Ли следующих групп Ли:

полная линейная группа $GL(n)$ — группа всех невырожденных матриц $n \times n$, или группа невырожденных линейных преобразований n-мерного линейного пространства V;

специальная линейная группа $SL(n)$ — группа всех матриц с определителем 1 или группа линейных преобразований пространства V, сохраняющих форму объема;

специальная ортогональная группа $SO(n)$ — группа ортогональных матриц $n \times n$ с определителем 1, или группа специальных линейных преобразований, сохраняющих невырожденную симметрическую билинейную форму (скалярное произведение);

симплектическая группа $Sp(n)$ — группа симплектических матриц $2n \times 2n$ или группа линейных преобразований n-мерного пространства, сохраняющих невырожденную кососимметрическую билинейную форму (симплектическую форму);

унитарная группа $U(n)$ — группа унитарных матриц $n \times n$, или группа линейных преобразований комплексного n-мерного пространства, сохраняющих невырожденную эрмитову форму;

специальная унитарная группа $SU(n)$ — группа унитарных матриц с определителем 1;

группа Гейзенберга $HEI(2n+1)$ — группа невырожденных матриц порядка $n+2$ вида

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1_n & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где a — это строка длины n, b — столбец длины n, $c \in \mathbb{C}$, а 1_n — единичная матрица порядка n.

8. Найти группы Ли алгебр Ли

а) трехмерной алгебры Гейзенберга $\mathfrak{hei}(3)$;

б) алгебры Ли аффинных преобразований прямой $\mathfrak{aff}(1)$.

9. Для всякой линейной (т. е. содержащейся в $\mathfrak{gl}(n)$) алгебры Ли $\mathfrak{g}$ определим *экспоненциальное отображение exp*: $x \mapsto \exp x$.

а) доказать, что образы при экспоненциальном отображении алгебр Ли из задач $2а$–$д$ содержатся в связных компонентах единиц соответствующих групп задачи 7.

В целом отображение *exp* хорошими свойствами не обладает. В частности:

б) *exp*: $\mathfrak{su}(2) \to SU(2)$ не инъективно;

в) *exp*: $\mathfrak{sl}(2;R) \to SL(2;R)$ не сюръективно.

10. Описать все вещественные связные группы Ли размерности 1 и 2.

11. Пусть G — линейная группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли и $g \in G$. Обозначим через $\operatorname{Ad} g$ линейный оператор в $\mathfrak{g}$, заданный формулой $(\operatorname{Ad} g)x = gxg^{-1}$. Доказать, что $\operatorname{Ad} g$ задает автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$, что соответствие $g \mapsto \operatorname{Ad} g$ является представлением группы G в пространстве $\mathfrak{g}$ (оно называется присоединенным представлением группы G), и что $\operatorname{ad} = \operatorname{Ad}_* |_{g=e}$.

Коприсоединенным представлением $\operatorname{Ad}^\vee$ называется действие группы G в пространстве $\mathfrak{g}^*$, двойственное к Ad: $(\operatorname{Ad}^\vee g)\,\alpha(x) = -\alpha((\operatorname{Ad} g)x)$.

12. Найти орбиты в присоединенном и коприсоединенном представлениях групп Ли $HEI(3)$, $AFF(1)$, $SO(3)$, $SL(n)$.

2. Простые, полупростые, нильпотентные и разрешимые алгебры Ли

Пусть $\mathfrak{g}$ — произвольная алгебра Ли над полем $\mathbb{C}$.

Определение. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *простой*, если она не содержит нетривиальных идеалов.

Производным рядом алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется ряд

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{(1)} \supset \mathfrak{g}^{(2)} \supset \ldots \supset \mathfrak{g}^{(n)} \supset \ldots,$$

определяемый соотношениями: $\mathfrak{g}^{(n+1)} = [\mathfrak{g}^{(n)}, \mathfrak{g}^{(n)}]$.

Определение. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *разрешимой*, если $\mathfrak{g}^{(n)} = 0$ для некоторого n.

Убывающим центральным рядом алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется ряд

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(1)} \supset \mathfrak{g}_{(2)} \supset \ldots \supset \mathfrak{g}_{(n)} \supset \ldots,$$

определяемый соотношениями: $\mathfrak{g}_{(n+1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{(n)}]$.

Определение. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *нильпотентной*, если $\mathfrak{g}_{(n)} = 0$ для некоторого n.

1. К каким классам относятся алгебры Ли $\mathfrak{hei}(2n+1)$, $\mathfrak{aff}(1)$, $\mathfrak{sl}(2)$, $\mathfrak{so}(3)$?

Доказать следующие утверждения:

2. Всякая нильпотентная алгебра Ли разрешима.

3. Любая подалгебра и любая факторалгебра разрешимой алгебры Ли разрешима.

4. Если идеал $\mathfrak{h}$ и факторалгебра $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ разрешимы, то $\mathfrak{g}$ — разрешима.

5. Если $\mathfrak{u}$ и $\mathfrak{v}$ — разрешимые идеалы в $\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{u}+\mathfrak{v}$ — разрешимый идеал в $\mathfrak{g}$.

6. В любой алгебре Ли $\mathfrak{g}$ существует и единствен максимальный разрешимый идеал $\mathfrak{r}$ (называемый радикалом). Факторалгебра $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ не содержит разрешимых идеалов, отличных от 0.

Определение. Алгебра Ли называется *полупростой*, если ее радикал равен 0, т. е. она не содержит нетривиальных разрешимых идеалов.

7. Доказать, что алгебра Ли полупроста тогда и только тогда, когда она не содержит нетривиальных коммутативных идеалов.

Доказать следующие утверждения:

8. Теорема Ли. Приведем три эквивалентные формулировки:

а) Любое неприводимое представление разрешимой алгебры Ли в конечномерном комплексном линейном пространстве одномерно.

б) В пространстве любого конечномерного комплексного представления разрешимой алгебры Ли существует инвариантный вектор.

в) Любое комплексное представление разрешимой алгебры Ли приводится к треугольному виду.

9. Алгебра Ли разрешима тогда и только тогда, когда ее коммутант нильпотентен.

10. Теорема Энгеля. Пусть $\mathfrak{g}$ — линейная алгебра Ли, состоящая из нильпотентных операторов. Тогда в некотором базисе $\mathfrak{g}$ приводится к треугольному виду с нулями на главной диагонали.

11. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ нильпотентна тогда, и только тогда, когда для любого элемента $X \in \mathfrak{g}$ оператор $\operatorname{ad} X$ нильпотентен.

3. Разложение Фиттинга

1. Пусть $\mathfrak{g}$ — линейная алгебра Ли, а X, Y — ее элементы. Доказать тождества:

$$(\operatorname{ad} X)^n Y = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_n^m X^{n-m} Y X^m;$$

$$X^n Y = \sum_{m=0}^{n} C_n^m (\operatorname{ad} X)^{n-m} Y X^m.$$

2. Пусть $\mathfrak{g}$ — произвольная алгебра Ли над полем k; $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$; $\lambda, \mu \in k$. Доказать тождество:

$$(\operatorname{ad} X - \lambda - \mu)^n [Y, Z] = \sum_{m=0}^{n} C_n^m [(\operatorname{ad} X - \lambda)^{n-m} Y, (\operatorname{ad} X - \mu)^m Z].$$

Определение. Пусть $\mathfrak{g}$ — линейная алгебра Ли, определенная в пространстве V. Функция $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ называется *весом* алгебры Ли $\mathfrak{g}$, если $Xv = \lambda(X)v$, для некоторого $v \in V$, $v \neq 0$, и всех $X \in \mathfrak{g}$. Пространство

$$V_\lambda = \{v \in V \mid \exists n \in \mathbb{N} : (X - \lambda(X))^n v = 0 \; \forall X \in \mathfrak{g}\}$$

называется *весовым пространством* алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

3. Если линейная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ нильпотентна, то

а) для любого X из $\mathfrak{g}$ пространство $V_{\lambda(X)} := \{v \in V \mid \exists n \in \mathbb{N} : (X - \lambda(X))^n v = 0\}$ инвариантно относительно $Y \in \mathfrak{g}$;

б) пространство V разлагается в прямую сумму $V = \sum\limits_\lambda V_\lambda$, где суммирование ведется по конечному множеству линейных форм λ, являющихся весами алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Пусть $\mathfrak{g}$ — произвольная алгебра Ли, $\mathfrak{n}$ — ее нильпотентная подалгебра, $\hat{\mathfrak{n}} = \mathrm{ad}(\mathfrak{n})$ — линейная алгебра Ли. Применяя результат задачи *3б* к алгебре $\hat{\mathfrak{n}}$, получим разложение (называемое *разложением Фиттинга*) $\mathfrak{g} = \sum\limits_\alpha \mathfrak{g}_\alpha$, где α — произвольный вес, определенный на алгебре $\mathfrak{n}$.

Определение. Веса $\alpha \neq 0$ называются *корнями* алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а пространства $\mathfrak{g}_\alpha$ — ее *корневыми подпространствами*.

4. Доказать: а) $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$;

б) $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] \subset \mathfrak{g}_0$; $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_\alpha] \subset \mathfrak{g}_\alpha$;

в) $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{g}_0$.

Определение. Элемент H алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется *регулярным*, если оператор $\mathrm{ad}\, H$ имеет минимальную возможную кратность нуля (называемую рангом $\mathfrak{g}$).

5. а) Доказать, что множество регулярных элементов связно, открыто и всюду плотно в $\mathfrak{g}$.

б) Описать регулярные элементы в $\mathfrak{sl}(2)$, $\mathfrak{aff}(1)$.

6. Пусть H — регулярный элемент алгебры Ли $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{n} = \mathbb{C}H$ — одномерная нильпотентная подалгебра и $\mathfrak{g} = \sum \mathfrak{g}_\alpha$ — разложение

Фиттинга относительно $\mathfrak{n}$. Обозначим $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0$, $\tilde{\mathfrak{g}} = \sum\limits_{\alpha\neq 0} \mathfrak{g}_\alpha$. Тогда $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \tilde{\mathfrak{g}}$.

а) Пусть $X_0 \in \mathfrak{g}_0$, $\varepsilon \in \mathbb{C}$, $X = H + \varepsilon X_0$. Доказать, что при достаточно малом ε все собственные векторы оператора $\operatorname{ad} X$ с нулевыми собственными значениями содержатся в подпространстве $\mathfrak{h}$, в частности, $\operatorname{ad} X|_{\mathfrak{h}}$ — нильпотентный оператор.

Указание. Рассмотрите многочлен $P(\varepsilon) = \det_{\tilde{\mathfrak{g}}}(\operatorname{ad}(H + \varepsilon X_0))$.

б) Доказать, что подалгебра $\mathfrak{h}$ нильпотентна.

Указание. Рассмотрите многочлен $P_0(\lambda, \varepsilon) = \det_{\mathfrak{h}}(\lambda - \operatorname{ad}(H + \varepsilon X_0))$.

в) Доказать, что $\mathfrak{h}$ — максимальная нильпотентная подалгебра, содержащая H (картановская подалгебра). В разложении Фиттинга относительно $\mathfrak{h}$ имеет место равенство $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$.

г) Описать картановские подалгебры и корневые разложения для $\mathfrak{sl}(2)$, $\mathfrak{aff}(1)$, $\mathfrak{hei}(3)$.

7. Рассмотрим элемент $Z = [X_\alpha, X_{-\alpha}]$, где $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$. Тогда Z принадлежит $\mathfrak{h}$ и на Z определено значение корня $\lambda(Z)$.

а) Доказать, что $\lambda(Z) = r_\lambda \alpha(Z)$, где r_λ — рациональное число (зависящее от λ и α), причем, если $\alpha \neq 0$, то $r_\lambda \neq 0$ при некотором λ.

Указание. Рассмотреть подпростраство $V = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \mathfrak{g}_{\lambda + k\alpha}$.

б) Доказать, что $\operatorname{tr}(\operatorname{ad} Z)^m = \rho_m \alpha(Z)^m$, где коэффициент ρ_m рационален и $\rho_m \neq 0$ при четном m.

4. Форма Картана – Киллинга

Определение. *Формой Картана – Киллинга* алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется билинейная форма на $\mathfrak{g}$, задаваемая формулой:

$$(X, Y) = \operatorname{tr}((\operatorname{ad} X)(\operatorname{ad} Y)).$$

Если $\mathfrak{h}$ — подпространство в $\mathfrak{g}$, то через $\mathfrak{h}^{\perp}$ будем обозначать подпространство всех векторов, ортогональных к любому вектору из $\mathfrak{h}$ относительно формы Картана – Киллинга.

1. Доказать следующие свойства формы Картана – Киллинга:

а) $(X, Y) = (Y, X)$ (симметричность),

б) $([X, Y], Z) = (X, [Y, Z])$ (инвариантность),

в) Если $\mathfrak{n}$ — идеал в $\mathfrak{g}$ и $X, Y \in \mathfrak{n}$, то $(X, Y)_{\mathfrak{n}} = (X, Y)_{\mathfrak{g}}$,

г) Если $\mathfrak{h}$ — идеал, то $\mathfrak{h}^{\perp}$ — тоже идеал (в частности, $\mathfrak{g}^{\perp}$ — идеал).

Доказать утверждения:

2. Если $\mathfrak{g}^{\perp} = \mathfrak{g}$, то $\mathfrak{g} \neq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

3. Если $\mathfrak{g}^{\perp} = \mathfrak{g}$, то $\mathfrak{g}$ разрешима.

4. **Критерий Картана.** $\mathfrak{g}$ разрешима тогда и только тогда, когда $\mathfrak{g}^{\perp} \supset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

5. $\mathfrak{g}$ полупроста тогда и только тогда, когда ее форма Картана – Киллинга невырождена.

6. $\mathfrak{g}$ полупроста тогда и только тогда, когда она является прямой суммой простых алгебр Ли.

7. Если $\mathfrak{g}$ полупроста, то все ее дифференцирования — внутренние.

8. Если $\mathfrak{g}$ полупростая алгебра Ли, $\mathfrak{h}$ — ее картановская подалгебра (см. задачу 6*в* раздела 3) и $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum\limits_{\alpha \neq 0} \mathfrak{g}_{\alpha}$ — разложение Фиттинга, то

а) если $\alpha + \beta \neq 0$, то $\mathfrak{g}_{\alpha} \perp \mathfrak{g}_{\beta}$;

б) ограничение формы Картана – Киллинга на $\mathfrak{h}$ невырождено;

в) $\mathfrak{h}$ — коммутативная алгебра Ли (максимальная коммутативная подалгебра);

г) $\mathfrak{h}$ диагонализуема (т. е. все операторы $\operatorname{ad} X$, $X \in \mathfrak{h}$ могут быть одновременно приведены к диагональному виду).

5. Система корней полупростой алгебры Ли

Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли, $\mathfrak{h}$ — ее картановская подалгебра и

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \mathfrak{h}^*, \alpha \neq 0} \mathfrak{g}_\alpha$$

— разложение Фиттинга (корневое разложение).

Определение. *Системой корней* алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется множество

$$\Delta = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \mid \alpha \neq 0, \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}.$$

1. Описать картановские подалгебры, корневые векторы и системы корней для классических алгебр Ли $\mathfrak{sl}(n+1), \mathfrak{sp}(2n), \mathfrak{so}(2n)$ и $\mathfrak{so}(2n+1)$. Доказать простоту этих алгебр.

Указание. Рассмотреть реализацию ортогональной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в базисе, где матрица сохраняемого ею скалярного произведения имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ 1_n & 0 \end{pmatrix}$$

для $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n)$ и

$$\begin{pmatrix} 0 & 1_n & 0 \\ 1_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

для $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n+1)$.

Форма Картана–Киллинга задает естественный изоморфизм между пространствами $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{h}^*$. Обозначим через H^α элемент, двойственный к α, т. е. определяемый соотношением $\alpha(H) = (H^\alpha, H)$ для любого $H \in \mathfrak{h}$.

2. Доказать, что Δ порождает $\mathfrak{h}^*$.

3. Если $H \in \mathfrak{h}$, $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, то $(H, [X, Y]) = (H^\alpha, H)(X, Y)$.

4. Если $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, то $[X, Y] = (X, Y)H^\alpha$.

5. Положим $\mathfrak{h}_\alpha = [\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}]$. Доказать, что $\dim(\mathfrak{h}_\alpha) = 1$.

6. Доказать, что существует такой элемент $H_\alpha \in \mathfrak{h}_\alpha$, для которого $\alpha(H_\alpha) = 2$.

7. Доказать, что для любого элемента $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ найдется такой элемент $Y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$, что будут выполняться равенства:

$$[X_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha; \quad [H_\alpha, X_\alpha] = 2X_\alpha; \quad [H_\alpha, Y_\alpha] = -2Y_\alpha.$$

8. Введем на $\mathfrak{h}^*$ скалярное произведение, индуцированное с $\mathfrak{h}$: $(\alpha, \beta) = (H^\alpha, H^\beta)$. Тогда

$$\beta(H_\alpha) = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}.$$

9. Доказать, что $\dim(\mathfrak{g}_\alpha) = 1$ для любого $\alpha \in \Delta$.

10. Если $\alpha, c\alpha \in \Delta$ ($c \in \mathbb{C}$), то $c = 1$ или $c = -1$.

11. Если $\alpha, \beta \in \Delta$, то $\beta(H_\alpha)$ — целое число и $\beta - \beta(H_\alpha)\alpha \in \Delta$.

12. Пусть $\beta \neq \pm\alpha$, p и q — такие наибольшие целые числа, что $\beta - p\alpha \in \Delta$ и $\beta + q\alpha \in \Delta$, и пусть $V = \sum\limits_{k \in Z} \mathfrak{g}_{\beta + k\alpha}$. Тогда

а) $\beta(H_\alpha) = p - q$;

б) V — неприводимое представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2) = \langle X_\alpha, Y_\alpha, Z_\alpha \rangle$ размерности $p + q + 1$;

в) отображения $\operatorname{ad} X_\alpha \colon \mathfrak{g}_{\beta+k\alpha} \to \mathfrak{g}_{\beta+(k+1)\alpha}$, где $-p \leqslant k \leqslant q - 1$, суть изоморфизмы.

13. Если $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Delta$, то $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\beta+\alpha}$.

Представления алгебры $\mathfrak{sl}(2)$

14. Пусть T_m и T_n — неприводимые представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$ со старшими весами m и n соответственно. Разложить на неприводимые их тензорное произведение $T_m \otimes T_n$.

6. Абстрактные системы корней. Группа Вейля

Пусть V — это вещественное n-мерное евклидово пространство. Для любого $\alpha \in V$, $\alpha \neq 0$, обозначим через s_α отражение относительно гиперплоскости, ортогональной α:

$$s_\alpha(x) = x - \frac{2(x,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha.$$

Определение. Множество Δ векторов пространства V называется *системой корней* в V, если

а) Δ конечно, не содержит 0 и порождает V;

б) $s_\alpha(\Delta) = \Delta$ для любого $\alpha \in \Delta$;

в) для любых $\alpha, \beta \in \Delta$ число $n_{\beta\alpha} = \dfrac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$ является целым.

Число n называется *рангом* системы корней Δ, а элементы Δ — *корнями.*

1. а) Описать все системы корней ранга 1 и 2;

б) для любых двух элементов произвольной системы корней Δ определить возможные значения угла между ними и отношения их длин.

2. Нарисовать системы корней алгебр Ли $\mathfrak{sl}(2)$, $\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathfrak{sl}(2)$, $\mathfrak{sl}(3)$, $\mathfrak{so}(3)$, $\mathfrak{so}(4)$, $\mathfrak{so}(5)$, $\mathfrak{sp}(2)$, $\mathfrak{sp}(4)$.

3. Доказать, что если $\alpha, c\alpha \in \Delta$, где $0 < c < 1$, то $c = \pm\frac{1}{2}$.

Определение. Система корней Δ называется *приведенной*, если из того, что $\alpha, c\alpha \in \Delta$, следует, что $c = \pm 1$.

Пусть Δ — приведенная система корней в пространстве V, а $f \in V^*$ — такой линейный функционал на V, что $f(\alpha) \neq 0$ для любого $\alpha \in \Delta$. Пусть $\Delta_f^+ = \{\alpha \in \Delta \mid f(\alpha) > 0\}$ и $\Delta_f^- = \{\alpha \in \Delta \mid f(\alpha) < 0\}$. Ясно, что $\Delta_f^- = -\Delta_f^+$ и $\Delta = \Delta_f^- \cup \Delta_f^+$.

Определение. Элемент $\alpha \in \Delta_f^+$ называется *разложимым*, если найдутся такие $\beta, \gamma \in \Delta_f^+$, что $\alpha = \beta + \gamma$. В противном случае $\alpha \in \Delta_f^+$ называется *неразложимым*, или *простым.*

Пусть $S_f = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ — множество всех простых корней из Δ_f^+.

4. Доказать, что любой корень $\beta \in \Delta_f^+$ (соответственно $\beta \in \Delta_f^-$) может быть представлен в виде $\beta = \sum m_i\omega_i$, где m_i — целые неотрицательные (соответственно неположительные) числа.

5. Если $\alpha, \beta \in \Delta$ и $(\alpha, \beta) > 0$, то $\alpha - \beta$, $\beta - \alpha \in \Delta$.

6. Если $\alpha, \beta \in S_f$, то $(\alpha, \beta) \leqslant 0$.

7. S_f — базис в V.

8. Пусть функционал $f \in V^*$ и множество $S = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\} \subset \Delta$ таковы, что

а) S образует базис в V;

б) любой корень $\alpha \in \Delta$ является линейной комбинацией элементов ω_i с целыми коэффициентами одного знака;

в) $f(\omega_i) > 0$ для любого $\omega_i \in S$.

Доказать, что $S = S_f$.

9. Доказать, что любой положительный корень β представим в виде $\beta = \omega_{i_1} + \ldots + \omega_{i_m}$ так, что все частичные суммы $\omega_{i_1} + \ldots + \omega_{i_k}$ тоже являются корнями.

Обозначим через $s_\alpha (\alpha \in \Delta)$ отражение относительно гиперплоскости, ортогональной α.

Определение. *Группой Вейля* системы корней называется группа, порожденная отражениями s_α $(\alpha \in \Delta)$.

10. Описать системы простых корней и группы Вейля алгебр Ли из задачи 2.

11. Доказать, что s_{ω_i} переводит $\Delta_f^+ \setminus \{\omega_i\}$ в себя.

12. Положим $\rho = \frac{1}{2} \sum\limits_{\beta \in \Delta^+} \beta$. Доказать, что для любого простого корня ω имеет место равенство $s_\omega(\rho) = \rho - \omega$.

13. Пусть W_f — группа, порожденная отражениями s_ω, $\omega \in S_f$. Доказать, что для любого линейного функционала $F \in V^*$ найдется такой элемент $w \in W_f$, что $\langle w(F), \omega \rangle \geqslant 0$ для любого $\omega \in S_f$.

14. Доказать, что группа Вейля действует транзитивно на множестве систем простых корней.

15. Доказать, что для любого корня $\beta \in \Delta$ найдется такой элемент $w \in W_f$, что $w(\beta) \in S_f$.

16. Доказать, что группа Вейля совпадает с группой W_f.

17. Описать системы простых корней и группы Вейля алгебр Ли $\mathfrak{sl}(n+1)$, $\mathfrak{sp}(2n)$, $\mathfrak{so}(2n)$ и $\mathfrak{so}(2n+1)$.

Матрица Картана и схема Дынкина

Пусть Δ — приведенная система корней, $S = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ — система простых корней. Положим $n_{ij} = \dfrac{2(\omega_i, \omega_j)}{(\omega_j, \omega_j)}$. Матрица (n_{ij}) называется матрицей Картана системы корней.

18. Выписать матрицы Картана алгебр Ли из задачи 2.

19. Доказать, что $n_{ii} = 2$, а $n_{ij} = 0, -1, -2, -3$ при $i \neq j$.

20. Вычислить матрицы Картана для алгебр Ли $\mathfrak{sl}(n+1)$, $\mathfrak{sp}(2n)$, $\mathfrak{so}(2n)$ и $\mathfrak{so}(2n+1)$.

Схемой Дынкина системы корней называется ориентированный граф, вершины которого соответствуют простым корням $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, число ребер, соединяющих вершины i и j, равно числу $n_{ij} n_{ji}$ и ориентация направлена в сторону более короткого корня.

21. Нарисовать схемы Дынкина алгебр Ли из задачи 2.

22. Доказать, что схема Дынкина системы Δ несвязна тогда и только тогда, когда $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$, $\Delta_1 \perp \Delta_2$, причем $V = V_1 \oplus V_2, V_1 \perp V_2$ и Δ_i — система корней в V_i.

23. Доказать, что в связной схеме Дынкина с $n \geqslant 3$ тройных ребер не бывает.

24. Доказать, что схема Дынкина не может содержать циклов.

25. Назовем узлом вершину, которая соединена более, чем с двумя другими вершинами. Доказать, что схема Дынкина может содержать только тройные узлы с простыми ребрами.

26. Назовем особенностью узел или двойное ребро. Доказать, что схема Дынкина может содержать не более одной особенности.

27. Доказать, что схема Дынкина не может содержать следующих фрагментов:

28. а) Нарисовать схемы Дынкина простых классических алгебр Ли $\mathfrak{sl}(n+1)$ (серия A_n), $\mathfrak{so}(2n+1)$ (серия B_n), $\mathfrak{sp}(2n)$ (серия C_n), $\mathfrak{so}(2n)$ (серия D_n).

б) Доказать так называемые *изоморфизмы малых размерностей*:

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{so}(4) \simeq \mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2), & \mathfrak{sl}(2) \simeq \mathfrak{sp}(2) \simeq \mathfrak{so}(3), \\ \mathfrak{so}(6) \simeq \mathfrak{sl}(4), & \mathfrak{so}(5) \simeq \mathfrak{sp}(4). \end{array}$$

в) Нарисовать 5 возможных исключительных (т.е. не входящих в серии A_n, B_n, C_n, D_n) схем Дынкина. (Они обозначаются G_2, F_4, E_6, E_7, E_8, где индекс равен числу вершин схемы Дынкина).

29. (Простая алгебра Ли типа G_2.) Пусть V есть трехмерное линейное пространство с фиксированной трилинейной кососимметрической формой ω (формой объема), а V^* — двойственное к нему. Заметим, что линейные преобразования, сохраняющие форму ω, образуют алгебру Ли $\mathfrak{sl}(V)$.

Рассмотрим прямую сумму линейных пространств $\mathfrak{g} = V^* \oplus \oplus \mathfrak{sl}(V) \oplus V$ и определим на ней коммутирование:

1) если $A, B \in \mathfrak{sl}(V)$, то $[A, B] = AB - BA \in \mathfrak{sl}(V)$;

2) если $A \in \mathfrak{sl}(V)$, $v \in V$, то $[A, v] = Av \in V$;

3) если $A \in \mathfrak{sl}(V)$, $\alpha \in V^*$, то $[A, \alpha] \in V^*$ и $[A, \alpha](v) = -\alpha(Av)$;

4) если $v \in V$, $\alpha \in V^*$, то $[v, \alpha] = v \otimes \alpha - \frac{1}{3}\alpha(v) \in \mathfrak{sl}(V)$ (т. е. для любого вектора $w \in V$ значение линейного преобразования $[v, \alpha]$ на нем вычисляется по формуле $[v, \alpha](w) = \alpha(w)v - \frac{1}{3}\alpha(v)w)$;

5) если $v, w \in V$, то $[v, w] = \omega(v, w, \cdot) \in V^*$;

6) если $\alpha, \beta \in V^*$, то $[\alpha, \beta] := v \in V$, таким образом, что $\omega(v, \cdot, \cdot) = \alpha \wedge \beta$.

Доказать, что формулы (1)–(6) задают на $\mathfrak{g}$ структуру простой алгебры Ли типа G_2 (в частности, проверить, что $[v, \alpha]$ сохраняет форму ω).

7. Характеры. Формула Вейля для конечномерных полупростых алгебр

Характером модуля старшего веса χ называется $\mathrm{ch}(V_\chi) = \sum m_\lambda q^\lambda$, где m_λ — кратность веса λ, q — формальная переменная.

Для конечного неприводимого модуля старшего веса χ справедлива следующая *формула Вейля для характеров*:

$$\mathrm{ch}(V_\chi) = \frac{1}{D} \sum_{w \in W} (-1)^w q^{w(\chi+\rho)},$$

где

$$D = \prod_{\alpha \in \Delta_+} (q^{\alpha/2} - q^{-\alpha/2}).$$

1. Проверить формулу Вейля для $\mathfrak{sl}(2)$.

2. Вывести *формулу знаменателя*:

$$D = \sum_{w \in W} (-1)^w q^{w\rho}.$$

Указание: применить формулу Вейля к тривиальному представлению.

3. Независимо проверить формулу знаменателя для простейших классических алгебр ($\mathfrak{sl}(2), \mathfrak{sl}(3), \ldots$ — кто больше?).

8. Тождества Макдональда с точки зрения конечных систем корней

Пусть $\phi(q) = \prod\limits_{m>0}(1-q^m)$, $\eta(q) = q^{1/24}\phi(q)$, $q = e^{2\pi i\tau}$, $\operatorname{Im}\tau > 0$. Тогда $\eta(-1/\tau) = \sqrt{\frac{\tau}{i}}\eta(\tau)$.

1. Используя свойства модулярности $\eta(\tau)$ и формулу суммирования Пуассона доказать тождества:

$$\phi(q) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{(3n^2+n)/2}, \qquad \text{(Эйлер)}$$

$$\phi(q)^3 = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(4n+1)q^{2n^2+n}, \qquad \text{(Якоби)}$$

$$\phi(q)^2/\phi(q^2) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{n^2}, \qquad \text{(Гаусс)}$$

$$\phi(q^2)^2/\phi(q) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}q^{2n^2+n}. \qquad \text{(Гаусс)}$$

2. Для каждой системы корней рассмотрим число $g = \frac{1}{2}(\|\tilde{\alpha} + \rho\|^2 - \|\rho\|^2)$, где $\tilde{\alpha}$ — старший корень, ρ — полусумма положительных корней.

а) Доказать: $g = (\tilde{\alpha}, \rho) + \frac{1}{2}\|\tilde{\alpha}\|^2$.

б) Доказать: g — целое число, равное $\varepsilon + (\tilde{\alpha}, \rho)$, где $\varepsilon = 1, 2$ или 3 в зависимости от системы корней.

в) Следствие: $(\tilde{\alpha}, \frac{1}{g}\rho) < 1$.

г) Проверить на примерах «странную формулу»[1]: $(\rho, \rho)/g = d/12$, где $d = \dim\mathfrak{g}$.

[1] Так эта формула называется в литературе.

Рассмотрим θ-ряд

$$\theta(\tau) = \sum_{\mu \in gQ^\vee} \left(\prod_{\alpha \in \Delta_+} \frac{(\mu+\rho,\alpha)}{(\rho,\alpha)} \right) \exp\left(\frac{\pi i \tau}{g} (\mu+\rho, \mu+\rho) \right).$$

3. Преобразовать θ-ряд с помощью формулы суммирования Пуассона. Результат назовем *двойственным рядом.*

Указание: воспользоваться свойствами гауссова интеграла и связью между дифференцированием и умножением на двойственную переменную при преобразовании Фурье.

4. Формула суммирования Пуассона предписывает после преобразования Фурье суммировать по двойственной решетке. Показать, что двойственной к решетке $gQ^\vee$ будет решетка $g^{-1}P$, где P — двойственная к Q (P называется *решеткой весов*).

5. Доказать W-антиинвариантность полинома $F(\nu) = \prod\limits_{\alpha \in \Delta_+} (\nu, \alpha)$, где W — группа Вейля. *Указание*: достаточно проверить для отражений относительно простых корней.

6. Показать, что $\frac{1}{g}\rho + Q^\vee \subset g^{-1}P$, а все остальные слагаемые двойственного ряда (см. задачу 3) аннулируются.

7. Показать, что

$$\theta(\tau) = c \left(\frac{\tau}{i}\right)^{-d/2} \theta\left(-\frac{1}{\tau}\right),$$

где

$$c = \frac{1}{v} g^{l/2} (-i)^{|\Delta_+|} \sum_{w \in W} (-1)^w e^{2\pi i \langle w\rho, g^{-1}\rho \rangle},$$

v — объем фундаментальной области решетки $gQ^\vee$ и $l = \operatorname{rank} \mathfrak{g}$.

8. Из «странной» формулы (задача 2*г*) вывести, что $\theta(\tau) \sim \sim e^{\pi i \tau d/12}$ при $\tau \to \infty$.

Следствие. $\theta(\tau)$ *не есть тождественный нуль.*

9. Показать, что $|c| = 1$. *Указание*: дважды применить результат задачи 7 и воспользоваться следствием задачи 8.

10. Показать, что c — вещественная положительная константа. Указание: применить формулу знаменателя (раздел 7, задача 2).

11. Исследовать поведение $\theta(\tau)$ при сдвиге $\tau \mapsto \tau+1$. Убедиться, что θ и η^d имеют одинаковое модулярное поведение.

12. Из «странной» формулы (задача 2*г*) вывести совпадение порядка нулей θ и η^d в точке $\tau = i\infty$ ($\theta(\tau) \sim \eta(\tau)^d \sim e^{\pi i \tau d/12}$ при $\tau \to \infty$).

13. Доказать, что $\frac{\theta(\tau)}{\eta(\tau)^d}$ на верхней полуплоскости есть константа, отличная от нуля, иными словами $\eta(\tau)^d = \mathrm{const} \cdot \theta(\tau)$.

Указание: фактор верхней полуплоскости по модулярной группе — это риманова сфера.

9. Когомологии алгебр Ли

Пусть $\mathfrak{g}$ есть алгебра Ли и A — модуль над $\mathfrak{g}$. Под *k-мерной коцепью* алгебры $\mathfrak{g}$ с коэффициентами в A понимается кососимметрический линейный функционал на $\mathfrak{g}$ со значениями в A. Множество таких коцепей обозначается $C^k(\mathfrak{g}; A)$. Дифференциал $d = d_k\colon C^k(\mathfrak{g}; A) \to C^{k+1}(\mathfrak{g}; A)$ определяется формулой:

$$\begin{aligned}
&dc(g_1, \ldots, g_{k+1}) = \\
&\quad = \sum_{1 \leqslant s \leqslant t \leqslant k+1} (-1)^{s+t-1} c([g_s, g_t], g_1, \ldots, \hat{g}_s, \ldots, \hat{g}_t, \ldots, g_{k+1}) + \\
&\qquad + \sum_{1 \leqslant s \leqslant k+1} (-1)^s c(g_1, \ldots, \hat{g}_s, \ldots, g_{k+1}),
\end{aligned}$$

где $c \in C^k(\mathfrak{g}; A)$, $g_1, \ldots, g_{k+1} \in \mathfrak{g}$. Соответствующие когомологии называются когомологиями алгебры $\mathfrak{g}$ с коэффициентами в A и обозначаются $H^k(\mathfrak{g}; A)$. Если A — это одномерный тривиальный модуль, то обозначения сокращаются до $C^k(\mathfrak{g})$ и $H^k(\mathfrak{g})$.

1. Дать интерпретацию $H^0(\mathfrak{g}; A)$ и $H^1(\mathfrak{g})$.

2. Установить изоморфизм между $H^1(\mathfrak{g};\mathfrak{g})$, пространством внешних дифференцирований алгебры $\mathfrak{g}$ и множеством классов эквивалентных одномерных «правых» расширений алгебры $\mathfrak{g}$.

3. Доказать, что $H^2(\mathfrak{g})$ задает множество классов одномерных центральных расширений алгебры $\mathfrak{g}$.

4. Доказать, что $H^2(\mathfrak{g};\mathfrak{g})$ задает множество классов инфинитезимальных деформаций алгебры $\mathfrak{g}$.

5. Вычислить $H^1(\mathfrak{sl}(2);\mathfrak{sl}(2))$, $H^2(\mathfrak{sl}(2))$, $H^2(\mathfrak{sl}(2);\mathfrak{sl}(2))$; $H^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ и $H^2(\mathfrak{g})$, где $\mathfrak{g}$ — простая классическая алгебра Ли.

10. Проективные представления

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, T — неприводимое представление алгебры $\mathfrak{g}$ в пространстве V. Пусть $H \subset \operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ — подгруппа в группе автоморфизмов $\mathfrak{g}$, стабилизирующая T (т.е. для любого $h \in H$ представление T^h $(T^h(\xi) = T(h^{-1}\xi))$ эквивалентно T).

1. Продумать определения: проективного представления группы (алгебры) Ли; эквивалентных проективных представлений.

2. Доказать, что представлению T соответствует некоторое проективное представление группы H в пространстве V.

3. Пусть $\mathfrak{h} \subset \operatorname{der}\mathfrak{g}$ — подалгебра алгебры дифференцирований $\mathfrak{g}$. Продумать определение того, что $\mathfrak{h}$ стабилизирует представление T. Построить проективное представление $\mathfrak{h}$ в пространстве V, если $\mathfrak{h}$ стабилизирует T.

4. Доказать, что каждому проективному представлению алгебры Ли $\mathfrak{h}$ соответствует некоторый двумерный коцикл $\mathfrak{h}$ с коэффициентами в тривиальном модуле, причем эквивалентным представлениям соответствуют когомологичные коциклы.

5. Установить соответствие между множеством проективных представлений алгебры $\mathfrak{h}$ в пространстве V и множеством линейных представлений в V всевозможных центральных расширений алгебры $\mathfrak{h}$.

6. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{hei}(3)$ — алгебра Гейзенберга с образующими $p, q, 1$ и соотношением $[p, q] = 1$. Пусть χ — характер подалгебры $\mathfrak{h} = \langle p, 1\rangle : \chi(p) = 0, \chi(1) = 1$. Описать представление $T = \operatorname{ind}(\chi)$.

7. Описать группу $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ автоморфизмов алгебры $\mathfrak{g}$ и подгруппу $\operatorname{Aut}_1\mathfrak{g} \subset \operatorname{Aut}\mathfrak{g}$, сохраняющую 1 и $\langle p, q\rangle$.

8. Описать алгебру $\operatorname{der}\mathfrak{g}$ дифференцирований $\mathfrak{g}$ и подалгебру $\operatorname{der}_1\mathfrak{g} \subset \operatorname{der}\mathfrak{g}$, аннулирующую 1 и сохраняющую $\langle p, q\rangle$.

9. Построить проективное представление $\operatorname{der}_1\mathfrak{g}$, стабилизирующее T. Доказать, что оно эквивалентно линейному представлению и построить это линейное представление.

10. Решить задачи 6–9 для алгебры Гейзенберга $\mathfrak{g} = \mathfrak{hei}(2n+1)$.

11. Универсальная обертывающая алгебра, казимиры, теорема Гельфанда

1. Категория представлений алгебры Ли и ее универсальной обертывающей алгебры (у.о.а.) эквивалентны.

2. Теорема Гельфанда. Центр $Z(\mathfrak{g})$ у.о.а. совпадает с кольцом Ad-инвариантных полиномов на $\mathfrak{g}$.

3. Центр $Z(\mathfrak{g})$ у.о.а. совпадает с пространством $S_W(\mathfrak{h})$ W-инвариантных полиномов на $\mathfrak{h}$.

4. Кольцо $S_W(\mathfrak{h})$ имеет $\operatorname{rank}\mathfrak{g}$ образующих, набор степеней которых является инвариантом $\mathfrak{g}$.

Однородные образующие называются *образующими* (*полиномами*) *Шевалле.*

5. Найти базис W-инвариантов для $SL(N)$; других классических алгебр Ли.

6. Форма Картана–Киллинга — инвариант 2-го порядка, причем для простых алгебр Ли — единственный (с точностью до пропорциональности).

В силу задачи 1 каждому представлению алгебры Ли соответствует представление центра у.о.а. $Z(\mathfrak{g})$. Операторы этого представления называются *операторами Казимира*, или просто *казимирами*.

7. Доказать, что на модуле Верма старшего веса λ казимиры простой алгебры Ли являются скалярными операторами. Казимир второго порядка равен $\mu \cdot \mathrm{Id}$, где $\mu = (\lambda, \lambda + 2\rho)$. То же самое верно для неприводимого модуля старшего веса λ.

12. Аффинные алгебры Ли. Аффинные системы корней

Пусть $\mathfrak{g}_0$ — конечномерная простая алгебра Ли над $\mathbb{C}$ с формой Картана–Киллинга $(\cdot,\cdot)$, z — комплексная переменная. Пусть Z — одномерное линейное пространство над $\mathbb{C}$ с фиксированным базисным элементом c, d — оператор в пространстве лорановских полиномов от z, определяемый соотношением $dz^n = nz^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

1. Рассмотрим линейное пространство $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C}[z, z^{-1}] \oplus \oplus Z \oplus \mathbb{C}d$ и зададим на нем коммутатор с помощью соотношений $[xz^m, yz^n] = [x, y]z^{m+n} + (x, y)m\delta^m_{-n}c$, $[d, xz^n] = nxz^n$, $[c, \mathfrak{g}] = 0$. Доказать, что $\mathfrak{g}$ является алгеброй Ли. Эта алгебра Ли называется *аффинной алгеброй Ли*.

2. Пусть $e_1, \ldots, e_n$, $f_1, \ldots, f_n$, $h_1, \ldots, h_n$ — канонические образующие алгебры Ли $\mathfrak{g}_0$.

а) Доказать, что если присовокупить к ним элементы $e_0 := f_\theta z$, $f_0 := e_\theta z^{-1}$, $h_0 := c - h_\theta$, где θ — старший корень последней, e_θ, f_θ — соответствующие корневые векторы, $h_\theta := [e_\theta, f_\theta]$ то получится набор образующих алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (*канонические образующие*, или *образующие Шевалле*).

б) Доказать, что эти образующие удовлетворяют соотношениям $[e_i, f_j] = \delta_{ij}h_i$, $[h_i, h_j] = 0$, $[h_i, e_j] = a_{ij}e_j$, $[h_i, f_j] = -a_{ij}f_j$. Матрица $(a_{ij})^{i,j=n}_{i,j=0}$ называется *матрицей Картана* алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

в) Найти матрицы Картана аффинных алгебр, соответствующих классическим алгебрам Ли.

г) Доказать, что матрица Картана аффинной алгебры имеет коранг 1 (в то время как для простых конечномерных алгебр Ли она невырождена).

3. Определим на $\mathfrak{g}$ билинейную форму с помощью соотношений $\langle xz^m, yz^n\rangle = (x,y)\delta_{m+n,0}$, $\langle c,d\rangle = 1$, $\langle \mathfrak{g}, c\rangle = \langle \mathfrak{g}, d\rangle = 0$. Доказать, что эта форма инвариантна на $\mathfrak{g}$. В дальнейшем мы отождествляем пространства $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$ с помощью этой формы.

Пусть $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0$ — картановская подалгебра, Δ — соответствующая система корней. Назовем коммутативную подалгебру $\mathfrak{h}_a := \mathfrak{h} \oplus Z \oplus \mathbb{C}d$ *картановской* для соответствующей аффинной алгебры. Положим $\Delta := \Delta_I \cup \Delta_W$, где $\Delta_W := \{\alpha + nc \mid \alpha \in \Delta, n \in \mathbb{Z}\}$, $\Delta_I := \{nc \mid n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}\}$. Δ называется *системой корней* аффинной алгебры, Δ_W — системой вещественных корней, а Δ_I — мнимых. Каждому *вещественному* корню $\alpha \in \Delta_W$ сопоставим оператор в $\mathfrak{h}_a$ по формуле $s_\alpha(h) := h - \dfrac{2\langle \alpha, h\rangle}{\langle \alpha,\alpha\rangle}\alpha$, $h \in \mathfrak{h}_a$. Группа W, порожденная операторами s_α, называется *группой Вейля* аффинной алгебры.

4. Доказать, что любой корень представим в виде целочисленной линейной комбинации с коэффициентами одного и того же знака корней из следующего набора: $S := \{\alpha_0 = c - \theta, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — простые корни алгебры Ли $\mathfrak{g}_0$. S называется набором *простых корней* алгебры $\mathfrak{g}$.

5. Доказать, что группа W порождена отражениями относительно простых корней.

6. Доказать, что следующая формула определяет действие дуальной решетки корней $Q^\vee$ алгебры $\mathfrak{g}_0$ на $\mathfrak{h}$:

$$\gamma(h+\lambda c+\mu d) = h+\lambda c+\mu d - \left[\langle h,\gamma\rangle + \frac{b}{2}\langle\gamma,\gamma\rangle\right]c, \quad h\in\mathfrak{h},\ \gamma\in Q^\vee.$$

7. Доказать, что $W \cong W_0 \times Q^\vee$, где W_0 — группа Вейля алгебры $\mathfrak{g}_0$.

Указание: пусть $\alpha \in \Delta$, тогда действие $s_\alpha s_{\alpha+c}$ совпадает с действием $\alpha^\vee \in Q^\vee$ в смысле задачи 6.

8. Доказать, что следующая формула определяет действие дуальной решетки корней $Q^\vee$ на $\mathfrak{g}$: $\gamma(x_\alpha \otimes z^n) = x_\alpha \otimes z^{n-\langle\alpha,\gamma\rangle}$ $(\alpha + nc \in \Delta,\ \gamma \in Q^\vee)$.

9. Доказать, что действие каждого элемента $\gamma \in Q^\vee$ на $\mathfrak{g}$, определенное в задачах 6, 8, является автоморфизмом алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

10. Доказать, что мнимые корни неподвижны относительно группы Вейля (в противоположность ситуации с конечными системами корней, где любые два корня переводимы друг в друга).

11. Пространство $\mathfrak{h}$ является W-инвариантным.

12. Доказать, что для элементов матрицы Картана справедливо соотношение $a_{ij} = \dfrac{2\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle}$.

13. Аффинная алгебра $\widehat{\mathfrak{sl}(2)}$ и ее казимир

1. Доказать, что аффинная алгебра $\widehat{\mathfrak{sl}(2)}$, как линейное пространство, имеет базис $\{E_m, F_m, H_m, c \mid m \in \mathbb{Z}\}$, где $X_m := Xt^m$ $\forall X \in \mathfrak{sl}(2)$, E, F, H — образующие алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$, имеющие коммутационные соотношения $[H,E] = 2E$, $[H,F] = -2F$ $[E,F] = H$, c — образующая центра.

2. Элементы E, F_1, F, E_{-1}, c являются образующими алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{sl}(2)}$ относительно операций сложения, умножения на число и коммутирования.

Рассмотрим формальную сумму

$$\Omega_0 := 2\sum_{n\geqslant 0} F_{-n}E_n + 2\sum_{m>0} E_{-m}F_m + \sum_{m>0} H_{-m}H_m.$$

Убедиться, что написанные ниже коммутаторы имеют смысл и доказать соотношения:

3. а) $[E, 2F_{-n}E_n + 2E_{-n}F_n + H_{-n}H_n] = 0,\ \ n > 0.$

б) $[E, \Omega_0] = 2HE.$

4. а) $[F_1, 2F_{-n}E_n] = -2F_{-n}H_{n+1}$ $(n \geqslant 0)$;

б) $[F_1, 2E_{-m}F_m] = -2H_{1-m}F_m + 2\delta_{1,m}cF_m$;

в) $[F_1, 2H_{-m}H_m] = 2F_{1-m}H_m + 2H_{-m}F_{1+m}$;

г) $[F_1, \Omega_0] = 2(c-H)F_1$.

5. Сформулировать и доказать аналоги соотношений 3*б* и 4*г* для образующих F и E_{-1}.

Назовем оператор $d\colon X_m \mapsto mX_m$ $\forall X \in \mathfrak{g}$, $m \in \mathbb{Z}$ *оператором градуировки*. Доказать:

6. $[d, \Omega_0] = 0$.

7. $[E, H + \frac{1}{2}H^2] = -2HE$. Сформулировать и доказать аналог этого соотношения для образующей F.

8. $[F_1, H + \frac{1}{2}H^2] = 4F_1 + 2HF_1$. Сформулировать и доказать аналог этого соотношения для образующей E_{-1}.

9. $[F, cd] = -cF_1$.

10. Пусть $\Omega := \Omega_0 + H + \frac{1}{2}H^2 + 4d + cd$. Тогда $[E, \Omega] = [F_1, \Omega] = [F, \Omega] = [E_{-1}, \Omega] = 0$.

Таким образом, с учетом результата задачи 2 элемент Ω является казимиром алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{sl}(2)}$.

14. Формула характеров Вейля – Каца

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$ — алгебра Каца – Муди, порожденная простой алгеброй Ли $\mathfrak{g}_0$;

$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ — ее треугольное разложение;

$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$ — ее картановская подалгебра;

Δ_+ — множество ее положительных корней;

d_α — кратность корня α, $e_\alpha^{(i)}$ — его корневые векторы, $\langle e_\alpha^{(i)}, e_{-\alpha}^{(j)}\rangle = \delta^{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, d_\alpha)$;

$\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ — простые корни;

$e_0, \ldots, e_n, f_0, \ldots, f_n$ — образующие Шевалле;

$h_i = [e_i, f_i]$, $h^j \in \mathfrak{h} : \langle h_i, h^j\rangle = \delta_i^j$ для $i, j = 0, \ldots, n$;

W — группа Вейля алгебры $\mathfrak{g}$;

$D(\lambda) = \{\lambda - \sum\limits_{i=0}^{n} k_i\alpha_i \mid k_i \in Z_+,\ i = 0, \ldots, n\}$ для $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.

Определение. Говорят, что $\mathfrak{g}$-модуль V принадлежит категории O, если

1) он обладает весовым разложением $V = \bigoplus\limits_{\lambda\in\mathfrak{h}^*} V_\lambda$ и $e_\alpha^{(i)} V_\lambda \subseteq$ $\subseteq V_{\lambda+\alpha}$;

2) $\dim V_\lambda < \infty$ для всех λ;

3) множество весов модуля V содержится в объединении конечного числа множеств вида $D(\lambda)$: $P(V) = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid V_\lambda \neq 0\} \subset$ $\subset \bigcup\limits_{i=1}^{s} D(\lambda_i)$ для некоторых $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathfrak{h}^*$.

1. Доказать, что

а) любой модуль Верма M_χ (со старшим весом χ) принадлежит категории O;

б) присоединенный модуль ей не принадлежит;

в) любой модуль из категории O содержит хотя бы один старший вектор;

г) на любом модуле из категории O определено действие *обобщенного оператора Казимира* $\Omega := 2\rho + \sum\limits_{i=0}^{n} h_i h^i + \sum\limits_{\alpha\in\Delta_+} \sum\limits_{i=1}^{d_\alpha} e_{-\alpha}^{(i)} e_\alpha^{(i)}$ (определение ρ см. в задаче 2);

д) $P(M_\chi) = D(\chi)$;

е) $\mathrm{ch}(M_\chi) = e^\chi \prod_{\alpha\in\Delta_+} (1 - e^{-\alpha})^{-d_\alpha}$;

2. Пусть ρ_0 — полусумма положительных корней алгебры Ли $\mathfrak{g}_0$. Рассмотрим d как двойственный элемент к c относительно инвариантной билинейной формы (задача 12.3) и $\rho = \rho_0 + \theta d$, $\theta \in \mathbb{C}$.

а) Доказать, что можно так выбрать константу θ, что $\dfrac{2\langle\rho, \alpha_0\rangle}{\langle\alpha_0, \alpha_0\rangle} = 1$.

б) Доказать, что отражение s_i относительно простого корня α_i действует на ρ по формуле: $s_i(\rho) = \rho - \alpha_i$.

в) Преобразуем характер модуля Верма к виду $\mathrm{ch}(M_\chi) = e^{\chi+\rho}K^{-1}$, где $K = e^\rho \prod\limits_{\alpha\in\Delta_+}(1-e^{-\alpha})^{d_\alpha}$. Доказать, что K — выражение, антиинвариантное относительно группы Вейля W, т. е. $wK = \det(w)K$ для любого $w \in W$.

Указание. Достаточно рассмотреть действие лишь простых отражений s_i.

3. а) Пусть $V \in O$. Тогда $\mathrm{ch}\, V = \sum c_\psi \, \mathrm{ch}(M_\psi)$, где c_ψ — целые числа.

б) Если $V = V_\chi$ (модуль, порожденный старшим весом χ), то $c_\psi = 0$, если $\psi \notin D(\chi)$.

Указание. Пусть χ — старший вес модуля V (см. задачу 1*в*) и k — его кратность. Рассмотреть точную последовательность

$$0 \to M \to (M_\chi)^k \xrightarrow{\pi} V \to N \to 0$$

(π — естественный гомоморфизм, M — его ядро, N — коядро). Показать, что $\mathrm{ch}\, V = k\, \mathrm{ch}\, M_\chi + \mathrm{ch}\, N - \mathrm{ch}\, M$. Продолжить этот процесс с M и N.

4. Модуль V называется локально конечным, если $e_i^N v = f_i^N v = 0$ для любых $v \in V, i = 0, \ldots, n$ и достаточно большого N.

а) Доказать, что присоединенный модуль локально конечен, а модуль Верма — нет.

б) Доказать, что условие локальной конечности достаточно проверить лишь на образующих модуля V.

в) Модуль L_χ (неприводимый модуль со старшим весом χ) локально конечен тогда и только тогда, когда $\chi(h_i) \in Z_+$ для любых $i = 0, \ldots, n$ (такие веса называют доминантными).

5. Если модуль $V \in O$ локально конечен, то $\dim V_\lambda = \dim V_{w(\lambda)}$ для любого элемента $w \in W$ (весовая диаграмма W-инвариантна).

Указание. Рассмотреть $w = s_i$ и конечномерный $\mathfrak{sl}(2)$-модуль, порожденный подпространством $V_\lambda + V_{s_i\lambda}$.

Следствие. *Для доминантных весов χ весовая диаграмма модуля L_χ является W-инвариантной.*

6. Пусть $V = V_\chi$, а числа c_ψ — как в задаче 3. Доказать, что если $c_\psi \neq 0$, то $\langle \psi + \rho, \psi + \rho \rangle = \langle \chi + \rho, \chi + \rho \rangle$.

Указание. Воспользоваться решением задачи 3 и тем фактом, что на модуле со старшим весом оператор Казимира второго порядка коммутирует с действием $\mathfrak{g}$ и, следовательно, действует умножением на константу (какую?).

7. Пусть $V = L_\chi$, χ — доминантный вес. Если $\psi + \rho = w(\varphi + \rho)$, то $c_\psi = (\det w) c_\varphi$.

Указание. Из задач 2*в* и 3 следует, что $(\operatorname{ch} V_\chi) K = \sum\limits_\psi c_\psi e^{\psi + \rho}$ и левая часть этого равенства W-антиинвариантна.

8. Пусть χ — доминантный вес. Если $D \subseteq D(\chi)$ является W-инвариантным подмножеством, то для любого $\psi \in D$ найдется такое $w \in W$, что $w\psi$ — доминантный вес.

9. Пусть $\varphi, \psi \in \mathfrak{h}^*$; $\langle \varphi, \alpha_i \rangle \geqslant 0$ для любого $i = 0, \ldots, n$. Пусть, кроме того, $\varphi \in D(\psi)$ и $\langle \varphi, \varphi \rangle = \langle \psi, \psi \rangle$. Тогда $\varphi = \psi$.

10. Пусть χ — доминантный вес и $D = \{\psi \in P(L_\chi) \mid c_{\psi - \rho} \neq 0\}$. Тогда $D = W(\chi + \rho)$ (орбита $\chi + \rho$ под действием W).

Указание. Воспользоваться результатами задач 8 и 9.

11. Пусть $V = L_\chi$. Тогда

а) $c_\psi \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\psi = w(\chi + \rho) - \rho$, причем $c_{w(\chi+\rho)-\rho} = \det w$;

б) $\operatorname{ch} L_\chi = K^{-1} \sum_{w \in W} (\det w) e^{w(\chi + \rho) - \rho}$ (формула характеров Вейля – Каца);

в) $K = \sum\limits_{w \in W} (\det w) e^{w\rho - \rho}$.

15. Отображение момента

Пусть $\mathcal{F}$ — фазовое пространство с симплектическим действием группы G. Пусть $\mathcal{F}$ есть кокасательное расслоение, $x \in \mathcal{F}$, G_x — орбита точки x. Ограничим форму $p\,dq$ на G_x, поднимем на G и ограничим на касательное пространство в единице. Получим *отображение момента* $\mu\colon \mathcal{F} \to \mathfrak{g}^*$.

Доказать:

1. Пусть $\mathcal{F} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$, где $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли. Тогда $\mu(x, y) = [x, y]$ (указание: $p\,dq = (\delta X, Y)$, где $(\cdot,\cdot)$ — форма Картана – Киллинга).

2. Пусть $\mathcal{F} = \mathbb{R}^3$, $G = SO(3)$. Доказать, что в этом случае понятие момента совпадает с физическим понятием момента точки относительно начала координат.

3. $\mathcal{F} = \mathbb{R}^3$, $G = SO(2)$ — группа вращений относительно оси. Тогда μ — физический момент относительно оси.

4. $\mathcal{F} = \mathbb{R}^3$, G — группа переносов. Тогда μ — импульс.

16. Гамильтонова редукция на примере систем Калоджеро – Мозера

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(N)$, $\mathcal{F} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$, $P, Q \in \mathfrak{g}$, $\delta P, \delta Q \in T\mathfrak{g}$ (касательное пространство).

1. Проверьте, что форма $(P, Q) = \mathrm{tr}(PQ)$ пропорциональна форме Картана – Киллинга, $\Omega = \mathrm{tr}(\delta P \wedge \delta Q)$ — симплектическая форма на $\mathcal{F}$ (по определению если $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, то $A \wedge B = (\sum a_{ik} \wedge b_{kj}))$.

2. Пусть $J = (J_{ij})$, $J_{ij} = 1 - \delta_{ij}$. Найти стабилизатор G_J элемента J в $\mathfrak{sl}(N)$.

3. Показать, что решение уравнения $\mu(P, Q) = J$ по модулю действия G_J есть $Q = \mathrm{diag}(q_1, \ldots, q_N)$, $P = \mathrm{diag}(p_1, \ldots, p_N) + \nu J'$, где ν — число, $J' = (J'_{ij})$, $J'_{ij} = \dfrac{1 - \delta_{ij}}{q_i - q_j}(i \neq j)$, $J'_{ii} = 0$.

Указание. $\mu(P,Q) = [P,Q]$, Q может быть диагонализировано преобразованиями из G_J.

4. Многообразие решений уравнения $\mu(P,Q) = J$ по модулю действия G_J называется редуцированным многообразием. Показать, что в координатах p_i, q_i ограничение симплектической формы Ω на редуцированном многообразие имеет канонический вид.

5. Рассмотрим свободный гамильтониан в $\mathcal{F}$: $H = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(P^2)$. Проверить, что при ограничении на редуцированное многообразие H переходит в $\overline{H} = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{N} p_i^2 + \sum\limits_{i<j} \dfrac{\nu}{(q_i - q_j)^2}$ (гамильтониан Калоджеро – Мозера).

6. Функционалы $H_k = \operatorname{tr} P^k$ являются функционально независимыми интегралами движения нередуцированной системы и находятся в инволюции.

7. Общий факт: показать, что отображение редукции пуассоново (сохраняет скобку Пуассона).

8. Общий факт: G-инвариантные интегралы движения после редукции остаются интегралами движения.

9. Вывести из 6–8, что интегралы $\overline{H}_k$, полученные путем ограничения H_k на редуцированное фазовое пространство, функционально независимы и находятся в инволюции.

Следствие. *Система Калоджеро – Мозера вполне интегрируема в смысле теоремы Лиувилля.*

Изложенная в задачах 1–9 схема получения гамильтониана с потенциалом из свободной системы носит название *гамильтоновой редукции.*

17. Непериодическая цепочка Тода

$\mathcal{F} = T^*(G/N)$ — фазовое пространство, $G = GL(n)$, $N \subset G$ — подгруппа треугольных матриц с единицами на диагонали, $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n)$, $\delta P, \delta Q \in \mathfrak{g}$, $S = \operatorname{tr}(\delta P \wedge \delta Q)$, $H = \operatorname{tr}(\delta P \cdot \delta Q) = (\delta P, \delta Q)$, μ — отображение момента.

1. Доказать, что база расслоения $\mathcal{F}$ может быть отождествлена с полупрямым произведением групп диагональных и ортогональных матриц, а слой — с пространством всех симметрических матриц.

2. Показать, что S и H порождают инвариантные симплектическую и, соответственно, невырожденную симметрическую билинейные формы на $\mathcal{F}$.

3. Если $q \in G$, $p \in T_q^* G$ $(p = qP,\ P \in \mathfrak{g}^*)$, то $\mu(q,p) = qPq^{-1}$.

4. Пусть J — симметрическая матрица. Показать, что уравнение

$$\mu(q,p) = qPq^{-1} = J$$

в $\mathcal{F}$ всегда может быть приведено к аналогичному виду, где P — симметрическая, q — диагональная (воспользоваться результатом задачи 1 и разложением Ивасавы для q).

5. Пусть J — трехдиагональная матрица, на главной диагонали — нули, на двух соседних — единицы (остальные элементы — нули). Решить уравнение момента

$$\mu(q,p) = qPq^{-1} = J.$$

6. Пусть $q = \exp Q$, $Q = \mathrm{diag}(q_1, \ldots, q_n)$, $p_{ii} = p_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Тогда на пространстве решений уравнения момента (называемом редуцированным пространством) H принимает вид

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i^2 + \sum_{i=1}^{n} e^{2(q_{i+1} - q_i)}$$

— гамильтониан *непериодической цепочки Тода.*

7. Убедиться в том, что полная система интегралов цепочки Тода получается редукцией тех же интегралов свободной системы, что и в случае систем Калоджеро–Мозера («следов степеней»).

8. Доказать вполне интегрируемость непериодической цепочки Тода (см. задачи 6–9 раздела 16).

9*. Обобщить результат на случай произвольной конечной системы корней:

$$H=\sum_{i=1}^{n}p_i^2+\sum_{\alpha\in\Delta_s}e^{2\langle\alpha,Q\rangle},$$

где Δ_s — система простых корней.

18. Системы многих тел: случай Сазерленда

Пусть $\mathfrak{g}$ — комплексная полупростая алгебра Ли, $\dim\mathfrak{g}<\infty$, $\mathfrak{h}$ — ее картановская подалгебра, $\Delta=\{\alpha\}$ — ее система корней, $\hat{\mathfrak{g}}$ — соответствующая аффинная алгебра Ли, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — ее форма Картана–Киллинга, $G=\exp\mathfrak{g}$.

$\widehat{G}:=\{g\colon S^1\to G\mid g\in C^1\}$ — группа петель.

A — гладкая $\mathfrak{g}$-значная 1-форма на S^1.

$\phi\colon S^1\to\mathfrak{g}$ — многозначное отображение.

k,c — комплексные числа.

$\oint$ — интеграл по S^1.

1. Доказать, что те ϕ, для которых $\langle\phi,\phi\rangle$ — однозначный функционал на S^1, образуют линейное пространство (в дальнейшем предполагается, что ϕ принадлежит этому пространству).

Пусть Φ — пространство пар $(A,k),(\phi,c)$, $\Omega:=\oint\delta\phi\wedge\delta A+{}$ $+\,\delta c\wedge\delta k$.

2. Доказать, что Ω является симплектической формой на Φ (вариация $\delta\phi$ предполагается однозначной).

3. Определим действие $\widehat{G}$ на Φ (калибровочные преобразования):

$$(\phi,c)\to\left(g\phi g^{-1},c-\oint\langle\phi,g^{-1}\partial g\rangle\right),\tag{а}$$

$$(A,k)\to(gAg^{-1}+kg\partial g^{-1},k)\tag{б}$$

($\phi=\phi(\xi)$, $g=g(\xi)$, $\xi\in[0,2\pi]$). Доказать, что форма Ω инвариантна относительно этого действия.

4. Доказать, что момент равен $\mu = k\partial\phi + [A, \phi]$.

5. Классификация орбит коприсоединенного действия алгебры $\hat{\mathfrak{g}}$:

а) отождествить пространство пар (A, k) с $\hat{\mathfrak{g}}^*$;

б) доказать, что орбиты действия 3(б) находятся во взаимно однозначном соответствии с классами сопряженности монодромий уравнений $du = Au$ $(u\colon \mathbb{R} \to G)$;

в) доказать, что почти все формы A преобразованиями 3(б) приводятся к постоянным формам со значениями в $\mathfrak{h}$ (такие формы A назовем регулярными и в дальнейшем ограничимся только ими).

Введем обозначения:

$$J_\nu := \nu \sum_{\alpha\in\Delta} e_\alpha \in \mathfrak{g} \quad (\nu \in \mathbb{R}), \quad G_0 := \mathrm{Stab}_G J_\nu.$$

6. а) Доказать: $\mathrm{Stab}_{\widehat{G}}\, \delta(\xi) J_\nu = \{g \in \widehat{G} \mid g(0) \in G_0\}$.

б) Рассмотрим уравнение момента $k\partial\phi + [A, \phi] = \delta(\xi) J_\nu$ на пространстве регулярных форм A. Доказать, что преобразованиями задачи 3 его можно привести к уравнению с постоянной $\mathfrak{h}$-значной формой A, не меняя правой части уравнения.

Указание. Считать известным аналогичный факт для системы Калоджеро–Мозера.

7. Пусть P — картановская часть элемента ϕ, Q — постоянная картановская форма для $\frac{1}{k}A$. Привести уравнение момента к форме

$$k\partial P = \delta(\xi), \tag{а}$$
$$k\partial\phi_\alpha + \langle Q, \phi_\alpha\rangle = \delta(\xi) \tag{б}$$

и решить его. (Ответ: $P = \mathrm{const}$, $\phi_\alpha = \nu \dfrac{\exp(-i\langle Q, \alpha\rangle)}{\exp(-2i\langle Q, \alpha\rangle) - 1}$).

8. Показать, что редукция гамильтониана $H = \oint\langle\phi,\phi\rangle$ на Φ приводит к *гамильтониану Сазерленда*:

$$H_{red} = -\frac{1}{2}\langle P,P\rangle + \sum_{\alpha\in\Delta_+}\frac{\nu^2}{\sin^2\langle Q,\alpha\rangle}.$$

Список литературы

1. Серр Ж.-П. Алгебры Ли и группы Ли.— М.: Мир, 1969
2. Желобенко Д. П. Комплексные группы Ли и их представления.— М.: Наука, 1970
3. Кириллов А. А. Элементы теории представлений.— М.: Наука, 1972
4. Кац В. Бесконечномерные алгебры Ли.— М.: Мир, 1993
5. Бернштейн И. Н., Гельфанд И. М., Гельфанд С. И. Структура представлений, порожденных векторами старшего веса.— Функц. анализ и его прил., 1971, т. 5, вып. 1, с. 1–9
6. Frenkel I. B. Orbital theory of affine Lie algebras. Invent. Math. 77, №2 (1984), pp. 301–352
7. Арнольд В. И. Математические методы классической механики.— М.: Наука, 1974
8. Ольшанецкий М. А., Переломов А. М. Цепочка Тода как редуцированная система.— Теор. и матем. физика, 1980, т. 45, вып. 1, с. 3–18
9. Ольшанецкий М. А., Переломов А. М., Рейман А. и Семенов-Тянь-Шаньский М. Интегрируемые системы и конечномерные алгебры Ли.— Итоги науки и техники, сер. Совр. пробл. матем., т. 16., сс. 86–226.
10. Горский А. Интегрируемые системы многих тел в теории поля.— Теор. и матем. физика, 1995, т. 103, с. 681
11. Van Asch, Modular forms and root systems, Math. Ann., 222 (1976), pp. 145-170

Оглавление