Независимый Московский Университет
Высший Математический Колледж

ПРОГРАММА

курса математического анализа

1-й курс 2-й семестр 1996-97 уч. года

М. Э. Казарян, С. К. Ландо, Ю. А. Неретин, И. М. Парамонова

1. **Изображение кривых, заданных параметрически и неявно.** *Особые и характерные точки. Изображение кривой в окрестности особой точки. Поведение кривой на бесконечности. Асимптоты.*

2. **Дифференцируемость функций нескольких переменных.** *Производная функции по направлению. Примеры функций, имеющих частные производные, но не дифференцируемых. Теорема о равенстве смешанных производных. Производная композиции.*

3. **Формула Тейлора для функции многих переменных.**

4. **Принцип сжимающих отображений.** *Норма и полные нормированные пространства.*

5. **Теорема об обратной функции.** *Обратимость отображения и невырожденность матрицы Якоби. Производная обратной функции.*

6. **Теорема об обратной функции.** *Производная функции, заданной неявно. Вывод теоремы о неявной функции из теоремы об обратной функции.*

7. **Условные экстремумы.** *Вычисление производной ограничения функции на поверхность уровня другой функции. Множители Лагранжа.*

Высший Математический Колледж

Математический анализ 1-й курс 12 февраля 1997 года

Частной производной (обозначение: $\partial f/\partial x_1$) функции $f(x_1,x_2)$ двух аргументов называется обычная производная функции одного аргумента x_1, получаемой фиксированием какого-либо значения переменной x_2.

Определение. Функция $f(x_1,x_2)$ называется *дифференцируемой* в точке $a=(a_1,a_2)$, если она в окрестности этой точки отличается от некоторой линейной функции на члены малого порядка

$$f(x_1,x_2)=f(a_1,a_2)+A(x_1-a_1)+B(x_2-a_2)+o(r)\ , \qquad r=\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2}\ .$$

1. Докажите, что дифференцируемость влечет существование частных производных. Выразите константы A и B через частные производные функции f. (Ответ: $A=\frac{\partial f}{\partial x_1}$; $B=\frac{\partial f}{\partial x_2}$).

2. Постройте примеры, показывающие, что из существования частных производных дифференцируемость вовсе не следует.

Пусть $M\subset\mathbb{R}^2$ — некоторая область.

Определение 1. *Касательным вектором* к M в точке $a\in M$ называется произвольная пара чисел $\xi=(\xi_1,\xi_2)$.

Определение 2. Назовем две гладкие кривые $x(t)=(x_1(t),x_2(t))$ и $y(t)=(y_1(t),y_2(t))$ *эквивалентными*, если они отличаются на члены малого порядка: $x(0)=y(0)=a$, $x_i(t)-y_i(t)=o(t)$. *Касательным вектором* к M в точке $a\in M$ называется класс эквивалентных кривых.

Определение 3. *Дифференцированием* в точке $a\in M$ называется линейное соответствие D, сопоставляющее каждой дифференцируемой в точке a функции f число $D(f)$ так, что при этом выполняется равенство (называемое *тождеством Лейбница*)

$$D(fg)=f(a)D(g)+D(f)g(a)$$

для всяких f,g. *Касательным вектором* к M в точке $a\in M$ называется произвольное дифференцирование.

3. Докажите эквивалентность определений 1–3 касательного вектора. Укажите прямые соответствия, позволяющие перейти от каждой из трех интерпретаций касательного вектора к любой другой, например:

2)→1): кривой $x(t)$ ставится в соответствие пара чисел $\xi=(x_1'(0),x_2'(0))$.

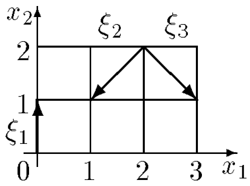
2)→3): По кривой $x(t)$ можно построить дифференцирование D, которое сопоставляет функции f число $f(x(t))'\Big|_{t=0}$ (штрих — производная функции одной переменной, получающейся композицией f и x). Проверьте, что D действительно является дифференцированием.

Касательным пространством в точке a (обозначение: T_aM) называется множество всех касательных векторов в этой точке.

4. Покажите, что на T_aM имеется структура векторного пространства. Какова его размерность? Выразите эту структуру (сложение векторов и умножение на числа) в различных интерпретациях касательных векторов.

Дифференциалом df функции f в точке a называется функция на касательном пространстве $df:T_aM\to\mathbb{R}$. Значение дифференциала на касательном векторе, заданном кривой $x(t)$ равно $f(x(t))'\Big|_{t=0}$.

5. Найдите значения дифференциалов dx_1, dx_1x_2, $d(x_1^2+x_2^2)$ на касательных векторах, изображенных на рисунке.



6. Докажите, что дифференциал — линейная функция на касательном пространстве. Указание: воспользуйтесь (доказав, сперва) следующей формулой суперпозиции: пусть заданы дифференцируемая в точке a функция f двух аргументов и две дифференцируемые функции x_1, x_2 одного аргумента, такие, что $a=(x_1(0),x_2(0))$. Тогда

$$\frac{d}{dt}f(x_1(t),x_2(t))\Big|_{t=0}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_a x_1'(0)+\frac{\partial f}{\partial x_2}\Big|_a x_2'(0)\ .$$

Пространство линейных функций на T_aM называется *кокасательным пространством* в точке a и обозначается T_a^*M.

7. Докажите, что дифференциалы координатных функций dx_1, dx_2 образуют базис в этом пространстве. Разложите по этому базису дифференциал произвольной функции. (Ответ: $df=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2$). Как, зная это, упростить решение задачи 5?

Математический анализ 1-й курс 19 февраля 1997 года

1. Дайте определение непрерывной функции двух переменных.

   а) Верно ли, что непрерывная по каждой переменной функция непрерывна?

   б) Верно ли, что непрерывная по любому направлению функция непрерывна?

2. Нарисуйте а) линии уровня $z=\mathrm{const}$ и б) графики для следующих функций:

$$z=\sqrt{x^2+y^2}\ ;\quad z=\sqrt[3]{x^2+y^2}\ ;\quad z=-y^2+x^2-x^4\ ;\quad z=\sqrt{-y^2+x^2-x^4}\ ;$$

$$z=\frac{1}{x^2+y^2}\ ;\quad z=\frac{x}{x^2+y^2}\ ;\quad z=\frac{xy}{x^2+y^2}\ ;\quad z=\cos x-y^2\ ;$$

$$z=\cos x\cos y\ ;\quad z=\sqrt[3]{x^2+y^4}\ ;\quad z=x^4+x^2y^2+y^5$$

Высший Математический Колледж

Математический анализ 1-й курс 26 февраля 1997 года

Теорема (простой критерий дифференцируемости). *Если все частные производные непрерывны в некоторой точке, то функция в этой точке дифференцируема.*

Теорема. *Если частные производные до второго порядка функции f непрерывны, то ее смешанные частные производные совпадают,* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

1. Приведите пример функции двух переменных, не являющейся дифференцируемой, у которой

   а) существуют обе частные производные в данной точке;

   б) существуют обе частные производные в некоторой окрестности данной точки.

2. Приведите пример функции двух переменных, для которой $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

3. Нарисуйте следующие кривые, заданные параметрически:

$$\begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = \cos^2 t \end{cases} \quad \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = e^{\pm t} \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases} \quad \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = \cos t \end{cases} \quad \begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2t^3 - 3t \\ y = t^4 - t^2 \end{cases}$$

Математический анализ 1-й курс 5 марта 1997 года

Теорема (о неявной функции). *Пусть частные производные функции F двух переменных непрерывны в точке (x_0, y_0) и пусть $F(x_0, y_0) = 0$, $\partial F/\partial y(x_0, y_0) \neq 0$. Тогда существует и единственна функция $\varphi(x)$, заданная в некоторой окрестности точки x_0, удовлетворяющая уравнению $F(x, \varphi(x)) = 0$. Более того, функция φ дифференцируема и ее производная выражается формулой* $\varphi'(x_0) = -\frac{\partial F/\partial x(x_0,y_0)}{\partial F/\partial y(x_0,y_0)}$.

1. Выведите из теоремы о неявной функции теорему об обратной функции: *пусть функция $y = f(x)$ непрерывна и дифференцируема в точке x_0, причем $f'(x_0) \neq 0$. Тогда f задает взаимно-однозначное соответствие некоторой окрестности точки x_0 на некоторую окрестность точки $y_0 = f(x_0)$, т.е. функция f обладает обратной функцией $f^{-1}(y)$, удовлетворяющей $f^{-1}(f(x)) \equiv x$. Обратная функция дифференцируема и ее производная выражается формулой $f^{-1\prime}(y_0) = 1/f'(x_0)$.*

2. Пусть $y = y(x)$ — заданная функция, $y(x_0) = 0$. Выразите константы разложения $x = x(y) = x_0 + Ay + By^2 + o(y^2)$ через производные функции y.

3. Функция $y = \varphi(x)$ задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$.

   а) Докажите, что если F бесконечно дифференцируема, то и φ бесконечно дифференцируема.

   б) Выразите φ'' через частные производные функции F.

4. Нарисуйте следующие кривые. Найдите особые точки, вертикальные и горизонтальные касательные. Найдите несколько членов ряда Тейлора для функций $y(x)$ и $x(y)$ в точке (x_0, y_0).

   а) $x^2 + xy + y^2 = 1$; $(x_0, y_0) = (0, 1)$;

   б) $x^3 + y^3 = 2xy$, $x^4 + y^4 = 2xy$; $(x_0, y_0) = (0, 0), (1, 1)$;

   в) $(x^2 - y^2)^2 + x^2 + y^2 = 100$; г) $(x^2 - y)^3 + x^2 + y^2 = 100$.

5. Под каким углом пересекаются гиперболы $x^2 + y^2 = a$; $xy = b$?

Высший Математический Колледж

Математический анализ 1-й курс 12 марта 1997 года

Теорема (принцип сжимающих отображений). *Пусть M — полное метрическое пространство. Пусть отображение $A : M \to M$ удовлетворяет $\rho(Ax, Ay) \leqslant \alpha\rho(x, y)$ $\forall x, y$, $\alpha < 1$. Тогда у отображения A существует и единственна неподвижная точка $Ax = x$.*

1. Докажите теорему. Покажите, что для любой начальной точки x_0 выполняется оценка $\rho(A^k x_0, x) \leqslant s\frac{\alpha^k}{1-\alpha}$, где $s = \rho(Ax_0, x_0)$.

2. Докажите, что уравнение $x = x^3 + 0.1$ имеет корень вблизи нуля. Найдите его первые 5–10 десятичных знаков.

3. Докажите, что система

$$\begin{cases} x = (x^2 + y^2)/100 \\ y = (xy^2 + 0.1)/100 \end{cases}$$

имеет решение вблизи нуля. Найдите это решение с точностью до 10^{-10}.

4. Как переписать уравнение $x^2 = 2$, чтобы для его решения можно было применить принцип сжимающих отображений? Годится ли $x = 2/x$?

5. Решая уравнение $x^2 - ax + b = 0$, его переписали в виде $x = a - b/x$. При каких a, b, x_0 процесс последовательных приближений сходится? К какому из двух корней (если они есть)?

6. Докажите, что всякое непрерывное отображение а) отрезка $[0, 1]$, б) диска D^2 в себя имеет неподвижную точку.

7. Докажите, что среди решений системы от бесконечного числа переменных

$$x_n = \frac{1}{5}(x_{n+1} + x_{n-1}) + \frac{1}{1+n^2}\,; \quad n \in \mathbb{Z}$$

существует и единственно ограниченное.

8. При каких матрицах $\{a_{ij}\}$ линейное отображение $(x_1, x_2) \mapsto (a_{11}x_1 + a_{12}x_2, a_{21}x_1 + a_{22}x_2)$ обратимо? Как должен выглядеть критерий обратимости функции двух переменных через ее частные производные?

Теорема (об обратном отображении). *Отображение $(x, y) \mapsto (f(x, y), g(x, y))$ задает взаимно-однозначное отображение некоторой окрестности точки (x_0, y_0) на свой образ, если определитель $\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}$ в этой точке отличен от нуля.*

Эквивалентная (но более правильная) формулировка: *если линейная аппроксимация отображения в некоторой точке обратима, то и само отображение обратимо в некоторой окрестности этой точки.*

Высший Математический Колледж

Математический анализ 1-й курс 19 марта 1997 года

Теорема (об обратном отображении; общий случай). *Пусть якобиан* $|J_0| = \left|\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j^0}\right|_{i,j=1,\ldots,n}$ *гладкого отображения* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *отличен от нуля в точке* $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$. *Тогда существует окрестность* U *точки* x^0, *такая что ограничение* $f\mid_U$ *обратимо, обратное отображение* f^{-1} *гладкое, и его матрица Якоби в точке* $f(x_0)$ *равна* J_0^{-1}.

1. Рассмотрим отображение плоскости в себя, задаваемое формулами:

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$$

Что это отображение делает с плоскостью? Где применима теорема об обратном отображении? Что происходит там, где она неприменима?

2. Ответить на те же вопросы для отображения $\begin{cases} u = x^2 - y^2 + 3\varepsilon x \\ v = 2xy - 3\varepsilon y \end{cases}$

Теорема (о неявной функции; общий случай). *Пусть точка* $(x^0, y^0) = (x_1^0, \ldots, x_k^0, y_1^0, \ldots, y_n^0) \in \mathbb{R}^{k+n}$ *является решением системы уравнений*

$$\begin{cases} f_1(x,y) = 0 \\ \quad\ldots \\ f_n(x,y) = 0 \end{cases}, \tag{1}$$

где $f = (f_1, \ldots, f_n) : \mathbb{R}^{k+n} \to \mathbb{R}^n$ *— гладкое отображение. Пусть определитель* $\left|\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j^0}\right|_{i,j=1,\ldots,n}$ *отличен от нуля. Тогда система* (1) *разрешима относительно переменных* y, *т.е. существует единственное гладкое отображение* $\varphi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, *заданное в окрестности точки* x_0, *такое, что в этой окрестности* $f(x, \varphi(x)) \equiv 0$.

3. Пусть задана система из n уравнений $\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_{k+n}) = 0 \\ \quad\ldots \\ f_n(x_1, \ldots, x_{k+n}) = 0 \end{cases}$. Предположим, что ранг матрицы частных производных $\left\{\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j^0}\right\}$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, k+n$, максимален, то есть равен n. Докажите, что можно всегда выбрать n координат, которые выражаются в силу системы через оставшиеся k координат как гладкие функции.

Высший Математический Колледж

Математический анализ 1-й курс 19 марта 1997 года

Контрольная работа

1. Построить кривые

$$a)\ x^4 + y^4 = x^2 y \qquad б)\ \begin{cases} x = \sin 3t \\ y = \sin 5t \end{cases}$$

2. Рассмотрим отображение плоскости без начала координат в себя

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \dfrac{x}{x^2+y^2} \\ \dfrac{y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

   а) Найдите якобиан этого отображения;

   б) Найдите его якобиан в полярных координатах;

   в) Найдите обратное отображение;

   г) Найдите образ окружности $(x-a)^2 + y^2 = c^2$ при этом отображении.

3. Изобразите множество точек, в окрестности которых необратимо отображение $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, заданное формулой

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ \sin xy \end{pmatrix}$$

Высший Математический Колледж

Математический анализ 1-й курс 26 марта 1997 года

Пусть L — конечномерное линейное вещественное пространство.

Определение. *Нормой* в пространстве L называется вещественнозначная функция $x \mapsto \|x\|$ на L, удовлетворяющая следующим условиям:

а) $\|x\| \geqslant 0, \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

б) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$;

в) $\|\lambda x\| = |\lambda|\, \|x\|$ для любого вещественного λ.

1. Доказать, что следующие функции задают нормы в $\mathbb{R}^n$:

$$\text{а)}\ \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}; \quad \text{б)}\ \|x\| = \max |x_i|; \quad \text{в)}\ \|x\| = \sum |x_i|.$$

2. Пусть S — центрально симметричное ограниченное открытое выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$. Для произвольного элемента $x \in \mathbb{R}^n$ через $\widetilde{x}$ обозначим пересечение границы S с отрезком, соединяющим x с 0. Тогда $x = \mu(x)\widetilde{x}$. Доказать, что $\mu(x)$ задает норму в $\mathbb{R}^n$. Доказать, что любая норма в $\mathbb{R}^n$ может быть получена таким образом.

3. Доказать, что любые две нормы в эквивалентны, т.е. найдутся такие положительные константы c_1 и c_2, что $c_1 \leqslant \frac{\|x\|_1}{\|x\|_2} \leqslant c_2$.

Пусть $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ — отображение, определенное в окрестности точки a.

Определение. Говорят, что отображение F *дифференцируемо* в точке a, если $F(a + h) = F(a) + Q(h) + o(\|h\|)$, где $Q(h)$ — линейное отображение.

4. Доказать, что матрица отображения $Q(h)$ есть матрица Якоби отображения F в точке a: $J_F(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$.

5. Пусть $F : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ задается формулой $F(A) = \det A$. Вычислить

   а) $J_F(E)$; б) $J_F(A)$.

6. Пусть $F : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^{n^2}$ задается формулой $F(A) = A^{-1}$. Вычислить

   а) $J_F(E)$; б) $J_F(A)$.

Теорема. Пусть $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ и $G : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ — дифференцируемые в точках a и $F(a)$ соответственно отображения. Тогда и их композиция $H = F \circ G$ дифференцируема в точке a и $J_H(a) = J_G(F(a))J_F(a)$.

7. Вычислить $(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})f$, если а) $f = f(r)$; б) $f = f(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$.

Высший Математический Колледж

Математический анализ 1-й курс 2 апреля 1997 года

1. Нарисуйте на плоскости кривую $\begin{cases} x = t^3 - 8t \\ y = t^3 - t \end{cases}$. Доказать, что при $t \to \infty$ эта кривая является графиком функции $y = y(x)$. Найти асимптотику этой функции. Обосновать возможность асимптотики.

2. То же задание для кривой $\begin{cases} x = t^4 - 2t^2 \\ y = 3t^5 - 5t^3 \end{cases}$.

3. Можно ли представить в виде образа гладкой кривой следующие множества: а) окружность; б) $x^2 = y^2$; в) $x^2 = y^2$; г) граница квадрата; д) квадрат; е) круг без границы.

4. Какие плохие точки бывают у кривой $\begin{cases} x = p(t) \\ y = q(t) \end{cases}$, где $p(t), q(t)$ — многочлены?

5. Пусть $\gamma(t)$ — гладкая кривая на плоскости, причем $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$, а $\dot\gamma(t_0) = (a, b)$ — касательный вектор к $\gamma(t)$ в точке t_0. Пусть $F(x, y)$ — гладкая функция двух переменных. Доказать, что $\frac{d}{dt}F(\gamma(t))\Big|_{t=t_0} = d_{(a,b)}F(x_0, y_0)$. (Под производной функции $F(x, y)$ в точке (x_0, y_0) в направлении вектора (a, b) понимается $d_{(a,b)}F(x_0, y_0) = a\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) + b\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$).

Высший Математический Колледж

Математический анализ 1-й курс 9 апреля 1997 года

Контрольное домашнее задание

1. Доказать, что если дифференцируемая функция $u = f(x, y)$ удовлетворяет уравнению $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = nu$, то она однородна порядка n (т.е. $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$).

2. Пусть функции φ и ψ дифференцируемы достаточное число раз. Вычислить:

   а) $y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $z = \varphi(x^2 + y^2)$;

   б) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если $u = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$.

3. Пусть $x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0 \qquad (1) \qquad$ и $f(x, y, z) = xy^2z^3$. Вычислить:

   а) $f'_x(1, 1, 1)$, если x, y, z — независимые переменные;

   б) $f'_x(1, 1, 1)$, если $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением (1) ;

   в) $f'_x(1, 1, 1)$, если $y = y(x, z)$ задана неявно уравнением (1) .

4. Пусть $x = x(y, z),\ y = y(x, z),\ z = z(x, y)$ — функции, определяемые уравнением $F(x, y, z) = 0$. Вычислить: $\dfrac{\partial x}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial z} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x}$.

5. Преобразовать к полярным координатам:

   а) $w = x\dfrac{\partial f}{\partial y} - y\dfrac{\partial f}{\partial x}$;

   б) $w = x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y}$;

   в) $w = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.

6. Найти все функции f, удовлетворяющие условию:

   а) $x\dfrac{\partial f}{\partial y} - y\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$;

   б) $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$.

7. Преобразовать к полярным координатам:

   а) Написать уравнение тора, расположенного в трехмерном пространстве, в виде $F(x, y, z) = 0$.

   б) В плоскости поперечного сечения тора провести прямую, внутренним образом касающуюся окружностей сечения. Нарисовать сечение тора плоскостью, проходящей через построенную прямую и прямую, перпендикулярную поперечному сечению.

8. Пусть уравнения $x = \varphi(u, v),\ y = \psi(u, v),\ z = \chi(u, v)$ определяют z как функцию от x и y. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Высший Математический Колледж

Математический анализ 1-й курс 16 апреля 1997 года

Контрольное домашнее задание (II вариант)

1. Вычислить $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, если $u = \frac{e^{-r}}{r}$, где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

2. Найти производную функции $z = \ln(x^2+y^2)$ в точке $M(x_0, y_0)$ в направлении, перпендикулярном к линии уровня, проходящей через эту точку.

3. Пусть функция $u = u(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

   и условиям $u(x, 2x) = x;\ u'_x(x, 2x) = x^2$.
   Найти $u''_{xx}(x, 2x);\ u''_{xy}(x, 2x);\ u''_{yy}(x, 2x)$.

4. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $F(x-y, y-z, z-x) = 0$.

5. В какой области плоскости Oxy система уравнений

$$\begin{cases} x = u + v \\ y = u^2 + v^2 \\ x = u^3 + v^3 \end{cases},$$

   где параметры u и v принимают всевозможные значения, определяет z как функцию переменных x и y ? Найти производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

6. Функция $u = u(x, y)$ определяется системой уравнений

$$\begin{cases} u = f(x, y, z, t) \\ g(y, z, t) = 0 \\ h(z, t) = 0 \end{cases}.$$

   Найти $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$.

7. В уравнении $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ сделать замену переменных $x = \varphi(u, v),\ y = \psi(u, v)$, удовлетворяющую условиям $\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial \psi}{\partial v},\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} = -\frac{\partial \psi}{\partial u}$.

Высший Математический Колледж

Математический анализ 1-й курс 23 апреля 1997 года

Пусть поверхность M задана неявно системой уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \qquad \cdots \\ f_k(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

и $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — некоторая функция. Мы ищем точки экстремума ее ограничения на M.

Теорема (принцип множителей Лагранжа). *Критические точки ограничения g на M соответствуют критическим точкам функции*

$$F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) = g + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_k f_k \ ,$$

то есть задаются уравнениями $\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_j} = 0 \\ f_i (= \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_j}) = 0 \end{cases}$.

1. Найдите максимум функции $x_1 x_2 \cdots x_n$ на множестве $\sum x_i = a, x_i \geqslant 0$.
2. Найдите экстремумы $x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$ при ограничениях $\sum x_i^2 = \sum y_i^2 = 1$.
3. Докажите неравенство $(\sum |x_i + y_i|^p)^{1/p} \leqslant (\sum |x_i|^p)^{1/p} + (\sum |y_i|^p)^{1/p}$.
4. Найдите максимум функции $\sum \alpha_i x_i$ на поверхности $\sum |x_i|^p = 1$ $(p > 1)$. Какому неравенству это соответствует?
5. Сколько нормалей можно опустить на эллипс из данной точки плоскости?
6. Найдите норму линейного оператора $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, то есть $\max\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$ для стандартной нормы $\|x\| = \sum x_i^2$.
7. Определите максимум и минимум функции $x^2 + 2y^2 + 3z^2$ на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
8. Докажите, что на торе любая функция имеет не меньше трех критических точек. Существует ли функция а) на сфере б) на торе с ровно тремя критическими точками?