НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Задачи экзамена по курсу "Комплексный анализ". Лектор – Сергеев А.Г.

Семинары – Кулаков А.Г., Домрин А.

2 курс, 4-ый семестр, 1996/97 учебный год, 25.05.1997.

Задача 1. Пусть $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$. Доказать, что $\max_{|z|=1} |P(z)| \geq 1$ и равенство достигается тогда и только тогда, когда $P(z) = z^n$.

Задача 2. Пусть $w = f(z)$ конформное отображение $U = \{|z| < 1\}$ на эллипс с полуосями $\frac{1}{2}\left(R + \frac{1}{R}\right)$ и $\frac{i}{2}\left(R - \frac{1}{R}\right)$, $R > 1$, причем $f(0) = 0$ и $f'(0) > 0$. Доказать, что f продолжается аналитически на $\bar{\mathbb{C}}$ без двух точек. Найти эти точки и описать особенности в них.

Задача 3. Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathcal{O}(D)$ и $g(z) = |f_1| + |f_2| + \cdots + |f_n|$ имеет локальный максимум в $z_0 \in D$. Доказать, что все $f_1, f_2, \ldots, f_n$ константы.

Задача 4. Доказать, что любая ветвь $f(z) = \sqrt[3]{z^3 - z}$ однолистна в $H = \{\Im z > 0\}$ и найти образ верхней полуплоскости.

Задача 5. Функция $f(z)$ голоморфна в кольце $\{1 \leq |z| \leq 2\}$, $\Im f = 0$ при $|z| = 1$, а $\Re f = 0$ при $|z| = 2$. Доказать, что $f \equiv 0$.

Задача 6. Описать аналитическую функцию $w = \sqrt[3]{z^2 - 5z + 6}$, изобразить "схему" ее римановой поверхности и вычислить топологический род.

Задача 7. Вычислить радиусы сходимости элементов $\frac{1}{1+\sqrt{z}}$ в точке 2.

Задача 8. Доказать, что $f(z) = \int_0^z (1 - \zeta^2)^{-\frac{2}{3}} d\zeta$ однолистна в верхней полуплоскости и найти $f(H)$; ветвь подинтегрального выражения выбирается так, что $(1 - 0^2)^{-\frac{2}{3}} = 1$.

Задача 9. Существует ли голоморфная в $U = \{|z| < 1\}$ функция f такая, что $\Re f > 0$ в U, $f(0) = 1$ и $f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$?

Задача 10. Доказать, что не существует непостоянных целых функций f и g таких, что $e^{f(z)} + e^{g(z)} \equiv 1$.

Задача 11. Пусть $P(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_n$, где $|c_i| \leq 1$. Доказать, что все нули $P(z)$ лежат в круге $\{|z| < 2\}$.