НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Задачи экзамена по курсу "Комплексный анализ". Лектор – Сергеев А.Г.

Семинары – Кулаков А.Г., Домрин А.

2 курс, 4-ый семестр, 1996/97 учебный год, 28.09.1997.

Задачи.

Задача 1. Пусть $w = f(z)$ конформное отображение $U = \{|z| < 1\}$ на эллипс с полуосями $\frac{1}{2}\left(R + \frac{1}{R}\right)$ и $\frac{i}{2}\left(R - \frac{1}{R}\right)$, $R > 1$, причем $f(0) = 0$ и $f'(0) > 0$. Доказать, что f продолжается аналитически на $\bar{\mathbb{C}}$ без двух точек. Найти эти точки и описать особенности в них.

Задача 2. Пусть функция f голоморфна в круге $\{|z| < 1\}$ и $f(a) = 0$. Докажите, что $|f'(a)| < \frac{R}{1-|a|^2}$ $(|a| < 1)$, где R – радиус наименьшего круга с центром в точке 0, в котором лежит образ.

Задача 3. Описать аналитическую функцию $w = \sqrt[4]{z(z^3-1)}$, изобразить "схему" ее римановой поверхности и вычислить топологический род.

Задача 4. Пусть $f(z)$ – ветвь $iz + \sqrt{1-z^2}$ вне $[-1, 1]$, равная 0 в ∞. Докажите, что она голоморфна в окрестности точки ∞, разложите f в ряд по степеням $\frac{1}{z}$ и найдите область сходимости этого ряда.

Задача 5. Доказать, что $f(z) = \int_0^z (1-\zeta^2)^{-\frac{2}{3}} d\zeta$ однолистна в верхней полуплоскости и найти $f(H)$; ветвь подинтегрального выражения выбирается так, что $(1-0^2)^{-\frac{2}{3}} = 1$.

Задача 6. Пусть f, g и h – целые функции такие, что $e^{f(z)} + e^{g(z)} + e^{h(z)} \equiv 0$. Докажите, что они линейно зависимы (над $\mathbb{C}$, естественно).

Задача 7. Пусть $P(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_n$, где $|c_i| \le M$. Оцените наименьший радиус круга, в котором лежат все нули $P(z)$.

Теоретические вопросы.

1. Автоморфизмы основных областей (расширенная плоскость, комплексная плоскость, единичный круг). Биголоморфные отображения области на круг.
2. Эллиптический синус.
3. Теорема Пикара.

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX