НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ВЫСШИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ

Комплексный Анализ. Лектор – Сергеев А.Г.
Семинары – Кулаков А.Г., Домрин А.
2-ой курс, 2-ой (4-ый) семестр, 1996/97 учебный год.

ПРОГРАММА КУРСА

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО
II семестр

1. Логарифмический вычет. Число нулей и полюсов функции, мероморфной в области.
2. Принцип аргумента.
3. Теорема Руше. Основная теорема алгебры.
4. Принцип сохранения области.
5. Локальное обращение голоморфных функций. Необходимое условие локальной однолистности.
6. Принцип максимума модуля.
7. Лемма Шварца.
8. Локально равномерно ограниченные семейства голоморфных функций.
9. Теорема Монтеля.
10. Теорема Гурвица. Предел последовательности однолистных голоморфных функций.
11. Автоморфизмы основных областей (расширенная плоскость, комплексная плоскость, единичный круг). Биголоморфные отображения области на круг.
12. Непрерывные функционалы на компактных семействах функций.
13. Теорема Римана.
14. Принцип соответствия границ. Теорема Каратеодори (без доказательства).
15. Принцип симметрии.
16. Конформное отображение верхней полуплоскости на прямоугольник.
17. Эллиптический синус.
18. Общие свойства эллиптических функций (периоды, теорема Лиувилля, вычеты и значения эллиптической функции в параллелограмме периодов).
19. Модулярная функция.
20. Теорема Пикара.

Задачи семинаров. Домрин А., Кулаков А.Г.

Семинар 1. *14.02.1997*

Задача 1. Докажите, что не существует голоморфной функции $f(z)$ в области D такой, что $f(z)^2 = z$ для всех $z \in D$, если

(1) $D = \{|z| < 1\}$;
(2) $D = \{0 < |z| < 1\}$.

Задача 2. Докажите, что если D односвязна, $f \in \mathcal{O}(D)$ и $f \neq 0$ всюду в D, то существует $g \in \mathcal{O}(D)$ такая, что $g(z)^2 = f(z)$.

Задача 3. Пусть f – голоморфная внутри $\mathbb{C} \setminus (\infty, 0]$ и $f(x) = x^x$ при $x > 0$. Вычислить $f(i)$.

Задача 4.

(1) В области $U_0 = \{|z-1| < \frac{1}{2}\}$ задан элемент $f_0(z) = \sqrt{|z|}e^{i\frac{arg\, z}{2}}$, где $-\pi < arg\, z < \pi$. Найти значение его продолжения по пути $\gamma(t) = e^{2\pi i t}$, $t \in \left[0, \frac{5}{4}\right]$ в точке $z = i$.
(2) Доказать, что этот же элемент не может быть продолжен по пути $[-1, 1]$, проходимому справа налево через точку 0.

Задача 5. Пусть $f(z)$ – целая функция, не имеющая нулей. Доказать, что существует целая функция $g(z)$ такая, что $f(z) = e^{g(z)}$. (Эквивалентная формулировка: Докажите, что $Lnf(z)$ распадается на голоморфные ветви.)

Задача 6. ("Многолистная теорема Лиувилля") Пусть элемент (U_0, f_0) допускает продолжение по любому пути в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ и для всех этих продолжений (U, f) выполняется неравенство $|f(z)| < 1$. Доказать, что $f_0 = const$.

Задача 7. Вычислите $res_{z=-k}\Gamma(z)$.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Задачи, не вошедшие в семинар.

Задача 8. Пусть $f(z)$ n-значная аналитическая функция и $n \neq \infty$. Тогда число ее различных значений почти в каждой точке (исключая счетное множество) равно n.

Задача 9. Число канонических элементов любой полной аналитической функции, имеющих один и тот же центр, не более, чем счетно.

Задача 10. Пусть элемент (U, f) продолжается по пути $\gamma(t)$, элемент (V, g) , $V \subset f(U)$ продолжается по пути $f(\gamma(t))$. Тогда композиция продолжается по пути $\gamma(t)$.

Задача 11. Вычислить радиусы сходимости рядов Лорана функции $\frac{1}{1+\sqrt{z}}$ в точках $z_0 = 0$ и $z_1 = 1$.

Задача 12. Сформулируйте эти задачи на языке накрытий?

Семинар 2. *21.02.1997*

Задача 1. Пусть $a \in \mathbb{C} \setminus 0$. Описать аналитическую фукцию $f(z) = a^z$ $(a^z = e^{zLn\ a})$.

Определение 1. Пусть элемент (U_0, f_0) продолжается по любому пути в $\{0 < |z - z_0| < \epsilon\} \supset U_0$. Тогда z_0 называется изолированной особой точкой аналитической функции f, определенной этим элементом.

Изолированные особые точки.

Однозначного характера | Точка ветвления

Устранимая | Полюс | Сущ. особенность | Точка ветвления конечного порядка | Логарифмическая точка ветвления

Задача 2. Описать особые точки следующих аналитических функций:

(1) $arctg\ z$,
(2) $\sqrt{\frac{1}{1+\sqrt{z}}}$,
(3) $\sqrt[3]{\ln z}$,
(4) $\sqrt{z(1-z)}$.

Задача 3. Какая особенность у функции $f(z) = \frac{1}{z^\pi}$ в нуле.

Задача 4. Привести пример аналитической функции, имеющей над точкой 0 существеннную особенность и точку ветвления второго порядка.

Задача 5. Напишите разложение в ряд Лорана (первые несколько членов, например, два) функции $f(z) = \frac{\sqrt{z(1-z)}}{1+z^2}$ с центром в точке $z_0 = \infty$.

Задача 6. Какое разложение имеет функция $\frac{1}{\sqrt{z}}$ с центром в точке $z_0 = 0$?

Задача 7. Вычислить $\int_0^1 \frac{\sqrt{x(1-x)}}{1+x^2} dx$, интегрируя функцию $f(z) = \frac{\sqrt{z(1-z)}}{1+z^2}$ по соответствующему контуру.

Семинар 3. *28.02.1997*

Задача 1. Описать аналитическую фукцию $f(z) = z^a$.

Задача 2. Пусть $n = 0, 1, 2, \ldots$. Доказать, что элемент (U_0, f_n), где $U_0 = \{|z| < 1\}$, $f_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^n}{k^n}$ продолжается по любому пути в $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Описать характер ветвления в точке $z = 1$.

Задача 3. Описать римановы поверхности следующих аналитических функций (изобразить "схемы"): $\sqrt{z}$, $\sqrt{z(1-z)}$. $\sqrt[3]{z}$, $\sqrt[3]{z^2-1}$, $\sqrt[4]{z^2+1}$, $\sqrt[4]{z^2}$, $\sqrt[4]{(z-1)^2(z+1)^3}$, $\sqrt[4]{\frac{z-1}{z+1}}$, $\sqrt{\frac{1}{1+\sqrt{z}}}$, $\sqrt[3]{\sqrt{z}-2}$, $\sqrt[3]{z}+\sqrt{z}$, $\sqrt[3]{z}\cdot\sqrt{z}$, $\sqrt[4]{z^2}+\sqrt{z}$, $\sqrt[6]{z}+\sqrt{z}$, $\sqrt[6]{z}\cdot\sqrt{z}$, $\sqrt[6]{\sqrt{z-1}+\sqrt[3]{\frac{z+1}{z}}}$, $\sqrt[4]{\sqrt{z+1}+\sqrt[3]{z^2-1}}$, $arctg\ z$, $\sqrt[3]{\ln z}$,

Подробно разбиралась задача 1 из семинара 2.

Семинар 4. *07.03.1997*

Задача 1. Описать аналитические функции и изобразить "схемы" их римановых поверхностей:

(1) $arctg\ z$,
(2) $\arcsin z$.

Подробно разбирались решения этих задач.

Задачи, не вошедшие в семинар.

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$\dot{z} = a(t)z \quad (t, z \in \mathbb{C}).$$

В силу теоремы существования и единственности решения дифференциального уравнения, где $a(t)$ - дифференцируемая функция, для каждого $z(t_0)$ и t_0, для которых определена правая часть, решение локально существует и единственно. Для аналитических $a(t)$ решение локально является аналитической функцией.

Задача 2. Рассмотрим уравнение $\dot{z} = tz$ и обойдем особую точку $t = 0$ по контору $t \to e^{i\phi}t$, где ϕ изменяется от 0 до 2π. Докажите, что при этом обходе решение переходит в себя и продолжается на все $\mathbb{C}$.

Если функция $a(t)$ не определена в точке $t = 0$, то при обходе по контуру $t \to e^{i\phi}t$, где ϕ изменяется от 0 до 2π, получившееся решение, вообще говоря, может быть другим. Таким образом возникает росток аналитической функции, а на пространстве решений $Z = \{z(t)\}$ получается отображение $A : Z \to Z$. Отображение A называется *монодромией*. Найдите схемы римановых поверхностей и вид отображения A решений следующих уравнений:

Задача 3.

(1) $\dot{z} = \frac{1}{t}z$;
(2) $\dot{z} = \frac{1}{2t}z$;
(3) $\dot{z} = \frac{\sqrt{3}}{t}z$;
(4) $\dot{z} = \frac{i}{t}z$;
(5) $\dot{z} = \frac{1}{t^n}z$, $n \geq 2$;
(6) $\dot{z} = \frac{2t+1}{3t^2}z$.

Задача 4. Во всех вышеперечисленных случаях можно построить гомоморфизм из фундаментальной группы плоскости с проколотой точкой (т. е. $\mathbb{Z}$) в группу линейных отображений на пространстве решений нашего уравнения (т. е. группу комплексных чисел по умножению $\mathbb{C}^*$). Группа, являющаяся образом этого отображеия называется *группой монодромии*. Нарисуйте на комплексной плоскости для приведенных отображений образ фундаментальной группы.

Замечание. Из приведенных примеров видно, что для уравнения

$$\dot{z} = \sum_{i=-k}^{l} \frac{a_i}{t^i} z, \quad k, l \geq 0$$

вид линейного оператора на пространстве решений полностью определяется значением a_{-1}, т.е. вычетом. Докажите это.

Задача 5. Что изменится в случае, когда функция $a(t)$ не определена в двух точках? Изобразите схему римановой поверхности и определите вид отображения A для следующих дифференциальных уравнений:

(1) $\dot{z} = \frac{1}{t^2+1}z$;
(2) $\dot{z} = \frac{2t+1}{t^2+t}z$;
(3) $\dot{z} = \frac{1}{t^2-2}z$;
(4) $\dot{z} = \frac{1}{2t^2-1}z$;
(5) $\dot{z} = \frac{t}{t^2+1}z$;
(6) $\dot{z} = \frac{\frac{5}{6}t-\frac{1}{2}}{t^2-1}z$;
(7) $\dot{z} = (\frac{i}{t} + \frac{\sqrt{2}-i}{t+1})z$.

Задача 6. Рассмотрим уравнение

$$\dot{z} = \left(\frac{\lambda}{t-t_1} + \frac{\mu}{t-t_2}\right) z.$$

Гомоморфизм A полностью задается своими значениями на образующих. Для плоскости с двумя проколотыми точками фундаментальная группа – это свободная группа с двумя образующими, значения на которых и определяют отображение A. Докажите, что в случае, когда числа λ, μ и 1 линейно-независимы над $\mathbb{Q}$, а числа λ и μ линейно-независимы над $\mathbb{R}$, группа монодромии будет всюду плотно заполнять всю комплексную плоскость, т.е. ветвления будут бесконечного порядка.

Семинар 5. *14.03.1997*

Задача 1. Пусть $f \in \mathcal{O}\left(0 < |z| < \epsilon\right)$ и $\frac{f'}{f}$ имеет в нуле полюс первого порядка. Доказать, что f имеет в точке 0 либо нуль, либо полюс.

Задача 2. Найти число нулей

(1) $z^4 - 3z + 1$ в $\{|z| < 1\}$,
(2) $z^{10} + az^9 + 1$ в $\Re z > 0$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
(3) $ze^{2-z} - 1$ в $\{|z| < 1\}$,
(4) $z - 3/2 + e^{-z}$ в $\Re z > 0$,
(5) $z^3 + az^2 + bz + 1$ в $\Re z > 0$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Задача 3. Пусть $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$. Доказать, что $\max_{|z|=1} |P(z)| \geq 1$ и равенство достигается $\iff$ $P(z) = z^n$.

Задача 4. Пусть $f \in \mathcal{O}\left(\bar{D}\right)$, D – ограниченная односвязная область и $\Re f = 0$ на ∂D. Доказать, что $f = const$.

Задача 5. Найти число нулей $z^7 + az^4 + az^3 + 1$ в каждом из 4-ех квадрантов, если $a \in \mathbb{R}$, $a < 0$.

Задача 6. * Найти число нулей $z^7 + az^4 + bz^3 + 1$ в каждом из 4-ех квадрантов. Здесь $a, b \in \mathbb{R}$.

Задача 7. Найти число нулей $z^4 + z^3 - 4z + 1$ в кольце $1 < |z| < 2$.

Семинар 6. *21.03.1997*

Задача 1. Пусть $f \in \mathcal{O}(D)$, $D \subset \mathbb{C}$ – ограниченная односвязная область и $w_0 \notin f(\partial D)$. Доказать, что

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Число решений } z \in D \\ \text{уравнения } f(z) = w_0.\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\text{Числу обходов } f(z) \text{ вокруг } w_0 \text{ когда } z \text{ обходит} \\ \partial D \text{ один раз в положительном направлении.}\end{array}\right\}$$

Задача 2. Пусть $f \in \mathcal{O}(\bar{D})$, $D \subset \mathbb{C}$ – ограниченная односвязная область. Доказать, что число решений уравнения $f(z) = w_0$ в D одно и то же для всех w_0 из одной связной компоненты $\mathbb{C} \setminus f(\partial D)$.

Задача 3. (Обратный принцип соответствия границ.) Пусть D_1, D_2 – ограниченные односвязные области и $f \in \mathcal{O}(\bar{D}_1)$ отображает ∂D_1 биективно на ∂D_2. Доказать, что f биективно отображает D_1 на D_2.

Задача 4. Доказать, что $f(z) = z - \ln z$ однолистна в $H = \{\Im z > 0\}$ и найти $f(H)$. (Здесь $\ln z = \ln|z| + i \arg z$, $0 < \arg z < 2\pi$.)

Задача 5. Та же задача для $w = \sqrt[3]{z^3 - z}$. (Здесь выбрана ветвь в $\{\Im z > 0\}$, для которой $\sqrt[3]{10^3 - 10} > 0$.)

Задача 6. Доказать, что в условиях задачи 3, если z пробегает ∂D_1 один раз в положительном направлении, то $f(z)$ пробегает ∂D_2 один раз в положительном направлении.

Семинар 7. *28.03.1997*

Разбиралась задача 3 из семинара 5.

Задача 1. Верен ли принцип max для $\Re f$?

Задача 2. Решить задачу 3 из семинара 5 с помощью принципа max.

Задача 3. Пусть $f \in \mathcal{O}\left(|z| < 1\right)$ и $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. Доказать, что для всех $r \in (0, 1)$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n}.$$

Опираясь на этот факт, получить еще одно доказательство того, что $|f|$ достигает максимума на границе.

Задача 4. Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathcal{O}(D)$ и $g(z) = |f_1|+|f_2|+\cdots+|f_n|$ имеет локальный максимум в $z_0 \in D$. Доказать, что все $f_1, f_2, \ldots, f_n$ константы.

Задача 5. Пусть $f : \bar{U} \to \bar{U}$ – голоморфна на $U = \{|z| < 1\}$, $f(\partial U) \subset \partial U$ и f не обращается в нуль в U. Доказать, что f constant'a.

Задача 6. В условиях задачи 5, если f имеет нули $a_1, a_2, \ldots, a_n$ в U и нет других нулей, то $f(z) = c\prod_{i=1}^{n} \frac{z-a_i}{1-\bar{a}_i z}$ и $|c| = 1$.

Задача 7. Описать все $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ такие, что $|f(z)| = 1$ при $|z| = 1$.

Задача 8. Пусть $\Pi = \{\Re z > 0\}$, $f \in \mathcal{O}(\Pi) \cap C(\bar{\Pi})$ и $\max_{\partial\Pi} |f| \le 1$.

(1) Верно ли, что $\max_{\Pi} |f| \le 1$?
(2) * Верно ли, что $\max_{\Pi} |f| \le 1$, если $|f(z)| \le c\exp\{\sqrt{|z|}\}$ в Π?

Задача 9. Пусть $f : U \to U$ – голоморфна на $U = \{|z| < 1\}$ и $f(0) = 0$. Доказать, что $|f'(0)| \le 1$.

Задача 10. Пусть $f : U \to U$ – голоморфна на $U = \{|z| < 1\}$. Доказать, что $\frac{|f'(0)|}{1-|f(z)|^2} \le \frac{1}{1-|z|^2}$.

Задача 11. Существует ли голоморфная функция $f : \Pi \to \mathbb{C}$ такая, что $|f(z)| \le 1$ для всех $z \in \Pi$ но $f'(1) = 100$?

Задача 12. (Модификация теоремы Руше.) Пусть $|f| \ge |g|$ на ∂U и $f + g \ne 0$ на ∂U. Доказать, что f и $f + g$ имеют одинаковое число нулей в U.

Задача 13. Найти число нулей $P(z) = z^7 + 2z^3 + 1$ в U.

Задача 14. Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – ограниченная область с гладкой границей, $f \in \mathcal{O}(\bar{D})$ и $z_0 \in \partial D$ – точка, в которой достигается $\max_{\bar{D}} |f|$. Доказать, что $f'(z_0) \ne 0$.

Семинар 8. *04.04.1997*

Задача 1. (Теорема Картана) Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – ограниченная область, $f \in \mathcal{O}(D)$, $f(D) \subset D$ и $f(z_0) = z_0$, где $z_0 \in D$ – некоторая точка.

(1) Доказать, что $|f'(z_0)| \le 1$. (Указание: Рассмотреть итерации $f, f\circ f, f\circ f\circ f, \ldots$ и воспользоваться Леммой Шварца).
(2) Доказать, что если $f'(z_0) = 1$, то $f(z) \equiv z$,
(3) Доказать, что если $|f'(z_0)| = 1$, то $f : D \to D$ биголоморфно.

Задача 2. Пусть $D = \{z \in \mathbb{C} | \, |\Im z| < \frac{\pi}{2}\}$. Пусть $f : D \to D$ такое конформное отображение, что $f(z_0) = 0$ (здесь $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$ – фиксированная точка). Доказать, что $|f'(z_0)| = \frac{1}{\cos y_0}$.

Задача 3. Пусть $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ и $\Re f(z) \le c|z|^n$ для всех z. Доказать, что $f(z)$ – полином степени $\le n$.

Задача 4. Доказать, что функция ze^z сюръективно отображает $\mathbb{C}$ на $\mathbb{C}$. (Это верно и для $P(z)e^z$, где $P(z)$ – полином).

Задача 5. Пусть $f : U \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ – голоморфная функция. Доказать, что

$$M(r) \le |f(0)|^{\frac{R-r}{R+r}} M(R)^{\frac{2r}{R+r}} \text{ при } 0 < r < R < 1 \ \left(M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|\right).$$

Задача 6. Пусть $f_n : U \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ голоморфны и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(0)|$ сходится. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|^2$ сходится при $|z| \le \frac{1}{3}$. Можно ли заменить $\frac{1}{3}$ на большую константу?

Задача 7. Пусть $f(z) = \exp\{i \ln\frac{1-z}{1+z}\}$ для $|z| \le 1$, $z \ne \pm 1$ (ветвь ln выбрана так: $\ln 1 = 0$). Найти образ произвольной дуги окружности,

Семинар 9. *11.04.1997*

Задача 1. Отобразить конформно дополнения к множествам D_i на верхнюю полуплоскость или единичный круг

(1) $D_1 = \{\Im z = 0, -1 \le \Re z \le 1\}$;
(2) $D_2 = D_1 \cup e^{i\frac{\pi}{2}} D_1$;
(3) $D_3 = D_2 \cup e^{i\frac{\pi}{4}} D_2$;
(4) $D_4 = D_2 \cup D_5$, где $D_5 = \{\Re z = 0,5, -2 \le \Im z \le 2\}$.

Задача 2. Отобразить внешность единичного круга с разрезами по отрезкам $1 \ge |z| \ge a$, $arg z = \pi/n$ на единичный круг.

Задача 3.

(1) Можно ли конформно отобразить квадрат на прямоугольник?
(2) Можно ли конформно отобразить квадрат на прямоугольник так, чтобы вершины переходили в вершины?

Задача 4. Доказать, что два кольца $\mathcal{R}_1 = \{r_1 < |z| < R_1\}$ и $\mathcal{R}_2 = \{r_2 < |z| < R_2\}$ биголоморфно эквивалентны если и только, если $\frac{R_1}{r_1} = \frac{R_2}{r_2}$ и биголоморфное отображение либо $w = cz$, либо $w = \frac{c}{z}$.

Задача 5. Пусть $f \in \mathcal{O}(U) \cap C(\bar{U})$ и $f(z) = 0$ на некотором "отрезке" границы. Доказать, что $f \equiv 0$.

Задача 6. Пусть $w = f(z)$ конформное отображение $U = \{|z| < 1\}$ на эллипс с полуосями $\frac{1}{2}\left(R + \frac{1}{R}\right)$ и $\frac{i}{2}\left(R - \frac{1}{R}\right)$ $R > 1$, причем $f(0) = 0$ и $f'(0) > 0$. Доказать, что

(1) f продолжается по пути, идущему из точки 0 по мнимой полуоси до $+\infty$, "переваливающему" через ∞ и идущему из $-\infty$ по мнимой полуоси в точку 0; и найти значение продолжения в точке $z = 0$.
(2) f продолжается аналитически на $\bar{\mathbb{C}}$ без двух точек. Описать особенности в этих точках.
(3) Докажите, что существует константа c, такая что функция $g(z) = sn(c \arcsin z)$ отображает данный эллипс на круг радиуса $r = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$, $iK' = 2i \ln R$. (Указание: воспользоваться принципом симметрии.)

Задача 7. Пусть $D = D_1 - D_2$, где D_i – односвязны, $\bar{D}_2 \subset D_1$ и ∂D_i – аналитическая. Доказать, что D биголоморфна $\{r < |z| < R\}$ для некоторых r и R.

Семинар 10. *18.04.1997*

Пусть $f(z)$ – мероморфная функция на $\mathbb{C}$. L – множество ее периодов.

Задача 1.

(1) L – подгруппа $\mathbb{C}$ по сложению.
(2) Если L имеет предельную точку, то f константа.
(3) Если $L \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, то $L = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$, $\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{R}$.

Определение 2. В последнем случае L называется *решеткой*. Фиксируем L. Рассмотрим множество $K := \{f \in M(\mathbb{C}) | f(z + \omega_i) = f(z)\}$ всех мероморфных функций с данной L.

Задача 2. Докажите, что

(1) K – поле;
(2) $\{constant\} \subset K$;
(3) $f \in K \Rightarrow f' \in K$;
(4) главная часть $f|_a$ = главной части $f|_{a+n\omega_1+m\omega_2}$.

Определение 3. Естественную фундаментальную область Ω действия группы L на $\mathbb{C}$ будем называть *параллелограммом периодов*. $z \in \mathbb{C} |\, f(z) = a$ называется *a-точкой*. Число полюсов f в Ω с учетом кратности называется степенью f (обозначение: $deg(f)$).

Замечание. Для конкретной $f \in K$ можно выбрать параллелограмм периодов так, чтобы полюса и a-точки не лежали на $\partial\Omega$.

Задача 3. $f \in K$, тогда

(1) $deg(f) = 0 \Rightarrow f = const$;
(2) $f \neq const \Rightarrow deg(f) > 1$;
(3) $z_1, \ldots, z_k$ – полюса f, $deg(f) = k$, $\Rightarrow \sum Res|_{z_i} f = 0$;
(4) Число нулей f в $\Omega = deg(f)$;
(5) Число а-точек f в $\Omega = deg(f)$;
(6) $a_1, \ldots, a_n$ – полюса и нули f в Ω, а m_i – их кратности. Тогда $\sum a_i m_i = 0 \pmod L$.

Задача 4. Доказать, что ряд $\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum\limits_{\omega \in L}' [\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}]$ сходится равномерно на компактах, не содержащих точек решетки L, и определяет мероморфную четную функцию с полюсами 2-го порядка в точках решетки.

Задача 5. Доказать, что $\wp'(z) = -2 \sum\limits_{\omega \in L} \frac{1}{(z-\omega)^3} \in K$ (т.е. периодична с периодом решетки L) и нечетна. Вывести отсюда и из четности $\wp(z)$ периодичность $\wp(z)$, т.е. доказать, что $\wp \in K$.

Определение 4. $\wp(z)$ называется *Пе-функцией Вейерштрасса*.

Задача 6. Докажите, что вблизи $z_0 = 0$

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)S_{2n+2}z^{2n}$$

где $S_m = \sum\limits_{\substack{\omega\neq 0\\ \omega\in L}}' \frac{1}{\omega^m}$.

Задача 7. Получить такое же разложение для $\wp'(z)$. Выписать несколько (>3) первых членов разложения.

Задача 8. Доказать, что $\exists\, g_2, g_3 \in \mathbb{C}$ такие, что в выражении $(\wp')^2(z) - 4\wp^3(z) + g_2\wp(z) + g_3$ отсутствуют отрицательные степени и свободный член в разложении в ряд Лорана в точке $z_0 = 0$. Вывести отсюда, что тождественно $(\wp')^2(z) = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3$.

Задача 9. Доказать, что $\wp(z)$ осуществляет двулистное разветвленное накрытие $\mathbb{C}/L \to \hat{\mathbb{C}}$.

Задача 10. Пусть $P_3(x) = 4x^3 - g_2x - g_3$ не имеет кратных корней. Доказать, что род кривой $y^2 = P_3(x)$ равен 1.

Задача 11. Верно ли, что $(\wp(z), \wp'(z))$ отображает взаимно-однозначно $\mathbb{C}/L \to$ на кривую, заданную в $\mathbb{C}^2$ уравнением $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$?

Определение 5. Обозначим $e_1 := \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right)$, $e_2 := \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right)$, $e_3 := \wp\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)$.

Задача 12.

(1) Докажите, что нули $\wp'(z)$ – это $\frac{\omega_1}{2}$, $\frac{\omega_2}{2}$, $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$, с точностью до L.
(2) Выразите g_2, g_3 через e_i.
(3) Какова кратность корня уравнения $\wp(z) = e_i$?
(4) Докажите, что $e_i \neq e_j \quad (i \neq j)$, и, следовательно, эллиптическая кривая $X = \mathbb{C}/L$ изоморфна римановой поверхности $\{y^2 = P_3(x)\}$, где $P_3(x)$ – многочлен без кратных корней.

Задача 13. Доказать, что $\forall\, f \in K \quad f = R(\wp, \wp'))$.

Задача 14. Пусть $f \in K$, $f \neq const$, $deg(f) = 2k$ и f – четная. Пусть $a_1, \ldots, a_{2k}$ – полюса f, а $b_1, \ldots, b_{2k}$ – нули. Из четности f следует, что эти точки разбиваются на пары. Пусть точки $a_1, \ldots, a_k$; $b_1, \ldots, b_k$ – представители по одной из каждой пары. Докажите, что

$$f(z) = c\prod_{i=1}^{k}\frac{\wp(z) - \wp(b_i)}{\wp(z) - \wp(a_i)}.$$

Задача 15. Изоморфны ли K и $M(\bar{\mathbb{C}})$? Если нет, то какое подполе в K изоморфно $M(\bar{\mathbb{C}})$, какой элемент добавлен и какова степень расширения?

Задачи, не вошедшие в семинар.

Определение 6.

$$\xi(z) := \frac{1}{z} + \sum_{w\in L}'\left(\frac{1}{z-w} + \frac{1}{w} + \frac{z}{w^2}\right) \quad \sigma(z) := z\prod_{w\in L}'\left(1 - \frac{z}{w}\right)e^{\dfrac{z}{w} + \dfrac{z^2}{2w^2}}.$$

Задача 16. Доказать, что у $\xi(z)$ и у $\sigma(z)$ простые полюса в $w \in L$.

Задача 17. Доказать, что

(1) $\xi(z)$ и $\sigma(z)$ не периодические;
(2) $\sigma(z) = -\sigma(-z)$.

Задача 18. Доказать, что $\wp(z) = -\frac{d}{dz}\xi(z)$.

Задача 19. Доказать, что

(1) $\xi(z+w) = \xi(z) + 2\xi(\frac{w}{2})$;
(2) $\xi(z) = \frac{d}{dz}\log\sigma(z)$.

Задача 20. Пусть $f \in K$, $f \neq const$, $a_1 \ldots, a_p$ – полюса f, а $b_1, \ldots, b_p$ – нули. Доказать, что

$$f(z) = c\prod_{i=1}^{p}\frac{\sigma(z - b_i)}{\sigma(z - a_i)}.$$

Задача 21. Докажите, что

$$\wp(u)-\wp(v)=-\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma^2(u)\sigma^2(v)}.$$

Задача 22. Вычислить g_2 и g_3 для решеток

(1) $L_1=\{1,i\}$;

(2) $L_2=\{1,\omega_2=e^{2\pi i/3}\}$.

Задача 23. Пусть $\eta(z)$ – голоморфная в точке z_0 и $\eta'(z_0)\neq 0$. Тогда

$$\frac{\eta'(z_0)}{\eta(z)-\eta(z_0)}=\frac{1}{z-z_0}-\frac{\eta''(z_0)}{2\eta'(z_0)}-\frac{1}{6}\{\eta,z_0\}(z-z_0)+o(|z-z_0|),\ \text{где}$$

$$\{\eta,z_0\}=\left[\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)'-\frac{1}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2\right]\Bigg|_{z=z_0}$$

называется *производной Шварца (Шварцианом)*. Доказать инвариантность Шварциана при дробно-линейных отображениях.

Семинар 11. *25.04.1997*

Задача 1. Если $f\in\mathcal{O}\left(\bar U\right)$ не обращается в 0 на $\bar U$, то

$$\ln|f(0)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(e^{i\theta})|d\theta.$$

Задача 2. Если $f\in\mathcal{O}\left(\bar U\right)$ имеет в $\bar U$ лишь конечное число нулей $a_1,a_2,\ldots,a_n$, все они лежат в U и $f(0)\neq 0$, то

$$\ln|f(0)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(e^{i\theta})|d\theta+\sum_{j=1}^{n}\ln|a_j|.$$

Задача 3. Если $f\in\mathcal{O}\left(U\right)$ имеет в U бесконечное число нулей $a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$, занумерованных в порядке возрастания модуля $|a_i|$, и $f(0)\neq 0$, то при $|a_n|<R<|a_{n+1}|$

$$\ln|f(0)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(Re^{i\theta})|d\theta+\sum_{j=1}^{n}\ln\frac{|a_j|}{R}.$$

Вывести отсюда, что если f ограничена в U, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\ln|a_n|$ сходится.

Задача 4. Если $f\in\mathcal{O}\left(U\right)$ имеет в U бесконечное число нулей $a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$, занумерованных в порядке возрастания модуля $|a_i|$, $f(0)\neq 0$ и f ограничена, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|)$ сходится.

Задача 5. Если $f\in\mathcal{O}\left(\{\Re z>0\}\right)$ имеет бесконечное число нулей $b_1,b_2,\ldots,b_n,\ldots$ и ограничена, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|b_n|}$ сходится.

Задача 6. Пусть $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ голоморфна, $|f(z)|\leq Ce^{\frac{1}{2}|z|}$ и $f(n)=0$ для всех $n\in\mathbb{Z}$. Доказать, что $f\equiv 0$. Можно ли ослабить условие $|f(z)|\leq Ce^{\frac{1}{2}|z|}$ до условия $|f(z)|\leq Ce^{|z|}$?