Лекция 1: Определение и существование римановых поверхностей.

Определение. *Риманова поверхность — это связное 1-мерное комплексное многообразие, т.е. хаусдорфово связное топологическое пространство X такое, что существует счетное покрытие $X \subset \bigcup U_\alpha$ и гомеоморфизмы $z_\alpha : U_\alpha \to \Delta = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$, причем функции перехода $z_\alpha \circ z_\beta^{-1}$ голоморфны.*

Изоморфизмом римановых поверхностей естественно называется гомеоморфизм, который в каждых комплексных координатах представляется голоморфной функцией.

Риманова поверхность, очевидно, является гладкой вещественной 2-мерной поверхностью (у нас поверхность — это *связное* многообразие).

Если на данной вещественной поверхности S задана комплексная структура, т.е. набор комплексных координат с голоморфными функциями перехода, то возникает естественный оператор $J : TS \to TS$, который в любой локальной комплексной координате задается умножением на i. Очевидно, что $J^2 = -1$. Если $z = x + iy$ — комплексная координата, то в вещественных координатах (x, y) оператор J задается матрицей $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Определение. *Почти комплексной структурой на поверхности S называется такой оператор $J : TS \to TS$, что $J^2 = -1$.*

Чтобы по почти комплексной структуре воостановить комплексную, нужно построить в окрестности каждой точки координаты, в которых J будет иметь стандартный вид $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Это удобно сформулировать так:

Лемма. *Почти комплексная структура J задается комплексной структурой, если в окрестности U_p каждой точки $p \in S$ существуют координаты (x, y) такие, что*

$$i \cdot D(x, y) = D(x, y) \circ J, \qquad (*)$$

где $D(x, y) = dx + idy$ есть производная отображения $(x, y) : U_p \to \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$.

Доказательство очевидно: в условиях леммы производные функций перехода будут перестановочны с i, т.е. будут комплексно линейными отображениями, а это и есть одно из эквивалентных определений голоморфности.

Теперь мы можем доказать основной результат.

Теорема. *Любая почти комплексная структура на двумерной вещественной поверхности порождается (единственной) комплексной структурой.*

Доказательство основано на предыдущей лемме.

Зафиксируем гладкие координаты (x^1, x^2) в окрестности точки $p \in S$. Обозначим $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x^j}$, $j = 1, 2$. Пусть в этих координатах J задается матрицей $J = \begin{pmatrix} a(x^1, x^2) & b(x^1, x^2) \\ c(x^1, x^2) & d(x^1, x^2) \end{pmatrix}$. Условие $J^2 = -1$ эквивалентно тому, что $a = -d$ и $a^2 + bc = -1$.

Координаты (x, y) удовлетворяют условию $(*)$ из предыдущей леммы тогда и только тогда, когда

$$dx \circ J = -dy, \qquad (**)$$

где df — обычный дифференциал функции. Действительно, $(*)$ означает, что $(dx + idy) \circ J = (-dy + idx)$, но вещественная и мнимая части последнего равенства получаются друг из друга умножением справа на J.

Итак, нам нужно найти такую функцию $x = x(x^1, x^2)$, что $dx(p) \neq 0$, и дифференциальная 1-форма $dx \circ J$ является (локально) дифференциалом некоторой функции y. Последнее условие эквивалентно замкнутости этой формы, и, поскольку $dx \circ J = (a\partial_1 x + c\partial_2 x)dx^1 + (b\partial_1 x - a\partial_2 x)dx^2$, мы получаем для x уравнение в частных производных второго порядка

$$b\partial_1^2 x - 2a\partial_1\partial_2 x - c\partial_2^2 x + \begin{bmatrix} \text{члены с производными} \\ \text{порядка 1 от } x \end{bmatrix} = 0.$$

Поскольку $\det \begin{pmatrix} b & -a \\ -a & -c \end{pmatrix} = 1$, это уравнение *эллиптическое* и согласно теории УрЧП имеет достаточно много решений, что и требовалось для завершения доказательства.

Замечание. Понятие почти комплексной структуры можно определить в любой (четной) размерности. Но утверждение о том, что любая почти комплексная структура порождается комплексной, будет *неверным*. Необходимы дополнительные дифференциальные условия на J.

Нужно еще понять, когда на поверхности существует почти комплексная структура. Ответ подсказывает умножение на i в $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, которое есть ни что иное, как поворот на $\pi/2$ в "положительном" направлении.

Лемма. *Почти комплексная структура на 2-мерной поверхности S существует тогда и только тогда, когда S ориентируема.*

Доказательство следует приведенной выше идее.

Во-первых, если J — почти комплексная структура, то (e, Je) задает положительный базис в T_pS для любого ненулевого $e \in T_pS$.

Обратно, выберем риманову метрику g на S и рассмотрим "поворот на $\pi/2$ в положительном направлении", т.е. отображение $R^+_{\pi/2}(g)$, переводящее вектор e в ортогональный ему относительно g вектор e' такой, что базис (e, e') положителен. Очевидно, что $\left(R^+_{\pi/2}(g)\right)^2 = -1$, т.е. это и есть искомый оператор J.

Задача. Метрика g определяется поворотом $R^+_{\pi/2}(g)$ с точностью до *конформной эквивалентности.* (Две метрики g и g_1 конформно эквивалентны, если они пропорциональны: существует такая функция $f > 0$, что $g = f \cdot g_1$.)

Поскольку в комплексных координатах для $J = R^+_{\pi/2}(g)$ этот оператор совпадает с поворотом на $\pi/2$ для стандартной евклидовой метрики, получается такое

Следствие. (Теорема о конформных координатах.) *Любая риманова метрика на двумерной поверхности локально в некоторых координатах имеет вид $g = e^f(dx^2 + dy^2)$.*

Итак, пространство почти комплексных структур, согласованных с ориентацией, на ориентированной поверхности S есть факторпространство пространства метрик по конформной эквивалентности:

$$AC(S) = Met(S)/\overset{conf}{\sim}.$$

Теперь две почти комплексные структуры J_1 и J_2 задают изоморфные комплексные структуры, если существует диффеоморфизм $\varphi : S \to S$ такой, что $\varphi^* J_1 = J_2$. Следовательно, множество классов изоморфизма комплексных структур на S есть фактор

$$\mathcal{M}(S) = \left[Met(S)/\overset{conf}{\sim}\right]/\mathrm{Diff}_+(S),$$

где $\mathrm{Diff}_+(S)$ — группа сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов S.

Суммируем полученные результаты:

Теорема. *Комплексная структура на 2-мерной вещественной поверхности S существует тогда и только тогда, когда S ориентируема.*

Множество классов изоморфизма комплексных структур, согласованных с заданной ориентацией, есть

$$\mathcal{M}(S) \cong \left[Met(S)/\overset{conf}{\sim}\right]/\mathrm{Diff}_+(S),$$

где $Met(S)$ — пространство римановых метрик на S, $\overset{conf}{\sim}$ обозначает конформную эквивалентность, и $\mathrm{Diff}_+(S)$ — группа диффеоморфизмов S, сохраняющих ориентацию. Этот изоморфизм задается правилом

$$\begin{matrix}\textit{комплексная структура,}\\ \textit{в которой умножение на } i\\ \textit{есть } R^+_{\pi/2}(g)\end{matrix} \longleftrightarrow \begin{matrix}[g]\\ g \in Met(S)\end{matrix}$$

Остается описать вещественные двумерные поверхности. Мы ограничимся случаем компактных поверхностей, тем более, что в дальнейшем мы будем в основном заниматься именно компактными римановыми поверхностями. Итак, теорема из элементарной топологии:

Теорема. *Ориентируемая двумерная вещественная компактная поверхность диффеоморфна сфере с n ручками, т.е. поверхности, склеиваемой стандартным образом из $4n$-угольника.*

В силу предыдущей теоремы мы получаем полную гладкую (и, в частности, топологическую) классификацию *всех* компактных римановых поверхностей. Они разбиваются на счетное число классов в зависимости от значения числа $n \in \mathbb{Z}_+$. Каждому классу соответствует свое пространство классов изоморфизма комплексных структур $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}(S_n)$, где S_n — сфера с n ручками. Число n называют еще *родом* компактной римановой поверхности, а пространство $\mathcal{M}_n$ (правда, с дополнительными топологической и др. структурами) — пространством *модулей* римановых поверхностей рода n.