Лекция 10: Первый класс Черна, кривизна и теоремы типа Пикара.

1. Пусть $\mathcal{L}$ — линейное голоморфное расслоение на (не обязательно компактной) римановой поверхности S, заданное функциями перехода $g_{\alpha\beta}$ на покрытии $\{U_\alpha\}$. *Метрикой в расслоении* $\mathcal{L}$ назовем набор $h = (h_\alpha)$ гладких вещественнозначных положительных функций, удовлетворяющих условиям согласования $h_\alpha = |g_{\alpha\beta}|^2 h_\beta$.

Для любого мероморфного сечения $m = (m_\alpha)$ расслоения $\mathcal{L}$ мы можем определить его норму, положив $\|m\|^2 = h_\alpha |m_\alpha|^2$ в каждом U_α. Определение метрики гарантирует, что $\|m\|^2$ является корректно определенной функцией на S со значениями в $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Определение. *Формой Черна метрики $h = (h_\alpha)$ на $\mathcal{L}$ называется 2-форма*

$$c_1(h) := \frac{1}{2\pi i} \partial\overline{\partial} \ln h_\alpha \quad \text{в } U_\alpha.$$

Определение корректно, поскольку $\partial\overline{\partial} \ln |g_{\alpha\beta}| = 0$. Заметим, кроме того, что форма Черна любой метрики вещественна.

Если $h' = (h'_\alpha)$ — другая метрика на том же расслоении, то найдется вещественная функция ψ такая, что $h' = he^\psi$, и, следовательно, $c_1(h') = c_1(h) + \frac{1}{2\pi i}\partial\overline{\partial}\psi$. В частности, две формы Черна когомологичны.

На компактной римановой поверхности верно и обратное утверждение: *если вещественная 2-форма ω когомологична $c_1(h)$, то ω является формой Черна некоторой метрики на $\mathcal{L}$.*

Для доказательства рассмотрим более общим образом две когомологичные вещественные 2-формы ω_1 и ω_2 на S. Тогда, используя разложение Ходжа, получаем, что

$$\omega_1 - \omega_2 = d\xi = d(\xi^{1,0} + \overline{\xi^{1,0}}) = d(\eta + \partial\phi + \overline{\eta} + \overline{\partial\phi}) = -2i\partial\overline{\partial}\,\mathrm{Im}\,\phi,$$

где $\xi \in \Lambda^1(S, \mathbb{R})$, $\eta \in \Omega^1(S)$ и $\phi \in \Lambda^0(S)$.

Таким образом, найдется вещественная функция ψ такая, что $\omega - c_1(h) = \frac{1}{2\pi i}\partial\overline{\partial}\psi$, следовательно, $\omega = c_1(he^\psi)$, что и требовалось.

Итак, на компактной римановой поверхности формы Черна метрик в линейном расслоении $\mathcal{L}$ образуют класс $c_1(\mathcal{L}) \in H^2(S, \mathbb{R})$, называемый *первым классом Черна* этого расслоения.

Замечание. На *некомпактной* римановой поверхности $H^2(S, \mathbb{Z}) = 0$, и все формы Черна автоматически когомологичны нулю.

Лемма. *Пусть h — метрика в расслоении $\mathcal{L}$ на компактной римановой поверхности S, тогда*

$$\int_S c_1(h) = \deg \mathcal{L}.$$

Пусть $m = (m_\alpha)$ — мероморфное сечение $\mathcal{L}$ и $D = \sum n_a \cdot a$ — дивизор этого сечения. Пусть $[D] = \sum n_a \delta_a$ — соответствующая этому дивизору обобщенная 2-форма. По формуле Пуанкаре–Лелона в каждом U_α справедливо равенство

$$\frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial} \ln |m_\alpha|^2 = [D].$$

Отсюда по определению формы Черна и нормы сечения m получаем, что

$$\frac{1}{2\pi i}\partial\overline{\partial} \ln \|m\|^2 = c_1(h) - [D],$$

и обобщенные формы в правой части когомологичны, т.е.

$$\int_S c_1(h) = \widehat{c_1(h)}(1) = [D](1) = \deg D = \deg L,$$

что мы и утверждали.

Рассмотрим, например, в качестве $\mathcal{L}$ касательное расслоение $\mathcal{T}S$. Метрика в этом расслоении записывается в локальной координате $z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$ в виде $h = h_\alpha dz_\alpha \overline{dz_\alpha}$ и называется (эрмитовой) метрикой на S. Каждой такой метрике соответствует *риманова метрика*

$ds^2=h_\alpha(dx_\alpha^2+dy_\alpha^2)$ на S, имеющая в данных комплексных координатах конформный вид, а также *форма объема* $\omega_h=\frac{i}{2}h_\alpha dz_\alpha\wedge d\overline{z_\alpha}=h_\alpha dx_\alpha\wedge dy_\alpha$.

Найдем теперь форму Черна метрики h в $\mathcal{T}S$:

$$\frac{1}{2\pi i}\partial\overline{\partial}\ln h_\alpha=-\frac{1}{4\pi}\Delta\ln h_\alpha dx_\alpha\wedge dy_\alpha=\frac{1}{2\pi}K_h\omega_h,$$

где $K_h=-\frac{\Delta\ln h_\alpha}{2h_\alpha}$ — это классическая гауссова кривизна римановой метрики, записанной в конформном виде.

Поскольку любая риманова метрика приводится к конформному виду, из предыдущей леммы теперь получается *формула Гаусса–Бонне*

$$\frac{1}{2\pi}\int_S K_h\omega_h=\deg\mathcal{T}S=\chi(S).$$

2. Рассмотрим в верхней полуплоскости $\{z=x+iy\in\mathbb{C}\mid y>0\}$ стандартную метрику $\rho=\frac{dz\,d\overline{z}}{y^2}$, переходящую при конформном преобразовании верхней полуплоскости на единичный круг $\Delta=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\}$ в метрику Лобачевского (которую мы тоже будем обозначать через ρ). Форма Черна этой метрики есть

$$c_1(\rho)=\frac{1}{2\pi i}\partial\overline{\partial}\ln y^{-2}=\frac{1}{2\pi}\Delta\ln y\,dx\wedge dy=-\frac{1}{2\pi}\omega_\rho,$$

иначе говоря, гауссова кривизна $K_\rho=-1$.

Пусть теперь $p:\Delta\to S$ — голоморфное накрытие. Если $\sigma_1,\sigma_2:U\to\Delta$ — два сечения этого накрытия на $U\subset S$, то существует автоморфизм $\phi\in\mathrm{Aut}(\Delta)$ такой, что $\phi\circ\sigma_1=\sigma_2$. Поскольку $\mathrm{Aut}(\Delta)$ сохраняет метрику Лобачевского, мы заключаем, что на S корректно определена метрика

$$p_*\rho=(\sigma^{-1})^*\rho\qquad\text{для любого сечения } \sigma:U\to\Delta,$$

локально изоморфная ρ. В частности, гауссова кривизна этой метрики равна -1.

Пример: инвариантная метрика проколотого круга. Локально конформное отображение $p(z)=e^{iz}$ задает накрытие проколотого единичного круга $\Delta^*=\{w\mid 0<|w|<1\}$ верхней полуплоскостью и тем самым определяет в Δ^* метрику

$$\rho^*=p_*\rho=\frac{dwd\overline{w}}{|w|^2\ln^2|w|}.$$

Легко непостредственно проверить, что $p^*\rho^*=\rho$ и $K_{\rho^*}=-1$.

На самом деле любая риманова поверхность рода $g\geq 2$ накрывается единичным кругом и допускает метрику постоянной гауссовой кривизны. Однако пока что мы докажем более слабый результат, достаточный для наших приложений и, кроме того, допускающий многомерные обобщения.

Лемма. *На любой компактной римановой поверхности рода $g\geq 2$ существует такая метрика h, что*

$$\omega_h\leq -2\pi c_1(h),\qquad (*)$$

т.е. гауссова кривизна $K_h\leq -1$.

Выберем сначала положительную такую форму ω на S, что $\int_S\omega=-\chi(S)$. Найдется метрика h_0 на S с формой Черна $c_1(h_0)=-\omega$. Поскольку S компактна, $C\omega_{h_0}\leq\omega$ для некоторой константы $C>0$. Положим теперь $h=\frac{C}{2\pi}h_0$, тогда $c_1(h)=c_1(h_0)=-\omega\leq 2\pi\omega_h$, что и требовалось доказать.

3. В основе теории распределения значений голоморфных отображений лежит следующее обобщение леммы Шварца.

Лемма. (Лемма Л.Альфорса.) *Пусть S — риманова поверхность с метрикой h, удовлетворяющей условию $(*)$. Тогда для любого голоморфного отображения $f:\Delta\to S$ выполнено неравенство $f^*h\leq\rho$.*

Пусть $f^*h = \phi\rho$, где ϕ — неотрицательная функция. Тогда $f^*\omega_h = \phi\omega_\rho$.

Предположим сначала, что f голоморфно в окрестности $\overline{\Delta}$. Тогда $\phi(z) \to 0$ при $|z| \to 1$, поскольку $\rho \to \infty$ при $|z| \to 1$. Следовательно, функция ϕ достигает максимума в некоторой точке $z_0 \in \Delta$. Мы можем считать, что $\phi(z_0) > 0$.

В точке максимума вещественной функции матрица ее вторых производных неположительно определена, значит, $\Delta \ln \phi(z_0) \leq 0$ или, что то же самое, $i\partial\overline{\partial} \ln \phi(z_0) \leq 0$. Таким образом,

$$f^*\omega_h(z_0) \leq -2\pi f^* c_1(h)(z_0) = -2\pi c_1(f^*h)(z_0) = -2\pi c_1(\rho)(z_0) + i\partial\overline{\partial} \ln \phi(z_0) \leq \omega_\rho(z_0).$$

Итак, $\phi(z_0) \leq 1$, и по определению точки z_0 это выполнено всюду в Δ, т.е. $f^*h \leq \rho$.

Наконец, если отображение f голоморфно только в Δ, рассмотрим его ограничение на круги меньшего радиуса. Метрика Лобачевского в круге радиуса 1 есть предел метрик в кругах радиуса r при $r \nearrow 1$. Отсюда немедленно следует утверждение леммы.

Теперь мы можем доказать следующее красивое утверждение:

Теорема. (Большая теорема Пикара.) *Любое голоморфное отображение проколотого круга* $\Delta^* = \{w \mid 0 < |w| < 1\}$ *в компактную риманову поверхность рода* $g \geq 2$ *голоморфно продолжается в точку ноль.*

Наделим теперь S метрикой h, удовлетворяющей условию $(*)$. В силу леммы Альфорса и определения метрики ρ^* для любого голоморфного отображения $f : \Delta^* \to S$ справедливо неравенство $f^*h \leq \rho^*$.

Напомним, что любая риманова метрика на многообразии определяет расстояние между точками этого многообразия, причем получающаяся таким образом топология совпадает с исходной топологией на этом многообразии.

Мы получаем, что голоморфное отображение проколотого круга в S не увеличивает расстояний, вычисляемых в метриках ρ^* и h.

Дальнейшее рассуждение основано на следующем свойстве метрики ρ^*: пусть $\gamma_r = \{|z| = r\}$, тогда

$$\operatorname{diam}_{\rho^*} \gamma_r \leq \int_0^\pi \frac{r d\theta}{r|\ln r|} = \frac{\pi}{|\ln r|} \to 0 \quad \text{при } r \to 0.$$

Поскольку S компактна, найдется последовательность $a_n \to 0$ такая, что $f(a_n) \to y \in S$. Пусть $r_n = |a_n| \to 0$.

Предположим, что f не продолжается непрерывно в точку 0. Тогда существует окрестность $U \ni y$ такая, что для любого $r > 0$ найдется $\alpha \in (0, r)$, для которого $f(\gamma_\alpha) \cap \partial U \neq \emptyset$.

Пусть теперь $\alpha_n = \inf\{\alpha \mid \alpha < r_n,\, f(\gamma_\alpha) \subset U\} > 0$. Поскольку диаметры окружностей γ_{α_n} и γ_{r_n} в метрике ρ^* стремятся к нулю, а f не увеличивает расстояний, мы можем считать, переходя к подпоследовательности, что при $n \to \infty$ образы окружностей γ_{r_n} стягиваются к точке y, а образы γ_{α_n} — к некоторой точке $y' \in \partial U$.

Итак, в силу открытости голоморфного отображения образ кольца $\{\alpha_n < |z| < r_n\}$ при достаточно большом n является областью в $U \cong \Delta$, граница которой содержится в малых окрестностях точки $y \in U$ и $y' \in \partial U$. Ясно, что такой области не существует.

Полученное противоречие доказывает, что f непрерывно, а по теореме Римана и голоморфно продолжается в точку ноль, и доказательство теоремы закончено.

Задача. Доказать классический вариант большой теоремы Пикара: любая голоморфная функция $f : \Delta^* \to \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ мероморфно продолжается в точку 0. (Указание: рассмотреть метрику $\mu_*\rho$, где $\mu : \Delta \to \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ — модулярная функция.)

Назовем *римановой поверхностью типа* (g, p) поверхность, получающуюся удалением p точек из римановой поверхности рода g.

Задача. Любая риманова поверхность типа (g, p) с $p > 0$ допускает вложение в аффинное пространство $\mathbb{C}^N$ в качестве *аффинной алгебраической кривой.*

Следствие. *Пусть S — риманова поверхность рода $g \geq 2$. Для любой римановой поверхности S' типа (g', p') существует не более чем конечное число непостоянных голоморфных отображений $f : S' \to S$. Если хотя бы одно такое отображение существует, то $g' \geq g$.*