Лекция 2: Голоморфные и мероморфные функции и формы.

1. Фиксируем компактную риманову поверхность S. В области $U \subseteq S$ введем следующие обозначения:

$\Lambda^p(U)$	—	пространство комплекснозначных гладких дифференциальных p-форм в U
$\mathcal{O}(U)$	—	пространство голоморфных функций в U, т.е. пространство функций, голоморфных в каждой локальной координате
$\mathcal{M}(U)$	—	определяемое таким же способом пространство мероморфных функций в U

Введем еще понятие мероморфной формы. Будем говорить, что в U задана *мероморфная форма*, если в любой локальной координате задано выражение $m_z(z)dz$ с мероморфной функцией $m_z = m_z(z)$, причем при голоморфной замене координат $w = w(z)$ будет $m_w = m_z \frac{\partial z}{\partial w}$. Если все функции m_z голоморфны, то получится *голоморфная форма* в U. Пространство голоморфных форм в U обозначим через $\Omega^1(U)$.

Относительно локальной координаты z любую форму из $\Lambda^*(U)$ можно выразить через формы dz и $d\overline{z}$. Тем самым, возникает разложение по типам (или бистепеням)

$$\Lambda^p(U) = \bigoplus_{r+s=p} \Lambda^{r,s}(U).$$

Пространство $L^{r,s}(U)$ состоит из форм, в разложении которых dz встречается r раз, а $d\overline{z}$ соответственно s раз. Поскольку при голоморфной замене координат $dw = \frac{\partial w}{\partial z} dz$, это разложение инвариантно.

Заметим, что по соображениям размерности пространства $\Lambda^{r,s}(U)$ будут ненулевыми только при $0 \le r, s \le 1$.

Очевидно, $\Omega^1(U) \subset \Lambda^{1,0}(U)$ согласно определению голоморфной формы.

Вернемся теперь к мероморфным функциям и формам. В локальной координате с центром в точке $a \in S$ любая мероморфная в окрестности этой точки функция $m \not\equiv 0$ представляется в виде

$$m(z) = z^k g(z), \text{ где } k \in \mathbb{Z},\ g \text{ голоморфна, и } g(a) \neq 0. \qquad (*)$$

Целое число $\operatorname{ord}_a m = k$ называется *порядком* функции m в точке $a \in S$ и не зависит от выбора локальной координаты.

Аналогичным образом определяется *порядок мероморфной формы* в точке — это просто порядок функции m_z из локального выражения $m_z dz$.

Точки, в которых порядок положителен, называют нулями функции или формы, а точки, в которых порядок отрицателен, — полюсами. При этом порядок (или кратность) нуля или полюса есть число $|\operatorname{ord}_a m|$.

Введем теперь еще одно важное понятие. Пусть ω — мероморфная форма в окрестности точки $a \in S$. Из локального выражения $(*)$ следует, что существует такая окружность γ в локальной координате с центром в a, что внутри γ нет других полюсов формы ω, кроме, быть может, самой точки a. Ориентируем γ как границу диска с центром в a и определим *вычет формы ω в точке* $a \in S$ формулой

$$\operatorname*{res}_a \omega = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \omega.$$

Поскольку ω голоморфна в проколотой окрестности точки a, корректность определения следует из формулы Стокса и *замкнутости голоморфной формы:* $d\omega = d(m\,dz) = \frac{\partial m}{\partial \overline{z}} d\overline{z} \wedge dz = 0$. По той же причине вычет голоморфной формы равен нулю. Легко видеть, что в локальной координате z, если $\omega = m(z)dz$, то вычет равен коэффициенту при $1/z$ в разложении функции $m(z)$ в ряд Лорана.

Задача. Делая подстановку ряда в ряд, вывести (еще раз) из последнего замечания инвариантность определения вычета.

Замечание. В ТФКП фигурирует не вполне корректное понятие вычета мероморфной функции. В таком виде оно не инвариантно относительно замен координат. Фактически, речь идет о вычете мероморфной формы $f(z)dz$, где z — стандартная координата в $\mathbb{C}$.

Основной результат о вычетах мероморфной формы на компактной римановой поверхности — это следующая

Теорема. (Теорема Коши о вычетах.) *Пусть ω — мероморфная форма на S, тогда*

$$\sum_{a\in S} \operatorname*{res}_a \omega = 0.$$

Для доказательства заметим сначала, что сумма в левой части конечна, поскольку полюса ω дискретны, а S компактна.

Далее вырежем из S маленькие диски с центрами в полюсах ω. На дополнении S' к этим дискам ω голоморфна, и мы можем применить формулу Стокса:

$$0 = \int_{S'} d\omega = \int_{\partial S'} \omega = -2\pi i \sum_{a\in S} \operatorname*{res}_a \omega,$$

что и требовалось доказать.

Ниже мы проинтерпретируем эту теорему в терминах обобщенных функций, а пока получим важные, но нетрудные следствия.

Пусть $f \in \mathcal{M}(S)$ и $f \not\equiv 0$. Тогда $\eta_f = \frac{df}{f}$ — корректно определенная мероморфная форма на S, называемая *логарифмическим дифференциалом* f. Из локального выражения $(*)$ очевидно, что $\operatorname{res}_a \eta_f = \operatorname{ord}_a f$. Из теоремы Коши для η_f мы получаем следующий результат.

Теорема. *Для любой функции $f \in \mathcal{M}(S)$ справедливо равенство*

$$\sum_{a\in S} \operatorname*{ord}_a f = 0.$$

Эту теорему называют "теоремой равнораспределения", поскольку она означает в точности, что число прообразов любого значения $c \in \overline{\mathbb{C}}$ с учетом кратности одинаково.

Задача. Доказать это утверждение топологически.

Следствие. *Любая функция $f \in \mathcal{O}(S)$ постоянна.*

Задача. Вывести это следствие из принципа максимума.

Важное замечание. Строго говоря, мы еще не можем доказать, что на S существуют непостоянные мероморфные функции и ненулевые мероморфные или голоморфные формы. Отметим, что существуют комплексные многообразия большей размерности, на которых непостоянных мероморфных функций нет.

Задача. На $\mathbb{C}P^1$ нет ненулевых голоморфных форм.

2. Сейчас мы введем *обобщенные формы* (или *потоки*) — удобный вариант теории обобщенных функций на многообразии, созданный Ж.де Рамом.

Сначала наделим топологией пространства $\Lambda^p_c(U)$ гладких p-форм с компактным носителем в U. Последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к $u \in \Lambda^p_c(U)$, если

1) существует компакт $K \subset\subset U$ такой, что $\operatorname{supp} u_k \subset K$ для всех k;

2) $u_k \to u$ при $k \to \infty$ в C^∞ на K.

Определение. *Пространством $\mathcal{F}^p(U)$ обобщенных p-форм в U назовем пространство линейных непрерывных комплекснозначных функционалов на $\Lambda^{2-p}_c(U)$.*

Самый известный пример — это "δ-функция" в точке $a \in U$. Точнее говоря, это обобщенная 2-форма, заданная формулой $\delta_a(u) = u(a)$ для $u \in \Lambda^0_c(U)$.

Любой гладкой форме $\omega \in \Lambda^p(U)$ соответствует обобщенная форма $\widehat{\omega} = \int_U \omega \wedge \cdot$. Это отображение $\Lambda^p(U) \to \mathcal{F}^p(U)$ мы будем называть стандартным вложением, а его образ — пространством регулярных обобщенных форм.

Все операции (такие как умножение на гладкие функции и др.) на обобщенных формах задаются так, чтобы при ограничении на регулярные формы получалась стандартная операция на p-формах. Например, для дифференциала де Рама по формуле Лейбница и формуле Стокса имеем

$$\int d\omega \wedge u = \int d(\omega \wedge u) - (-1)^{\deg \omega} \int \omega \wedge du = (-1)^{\deg \omega + 1} \int \omega \wedge du.$$

Таким образом, следует дать такое

Определение. *Дифференциал де Рама $d = d_{\mathcal{F}} : \mathcal{F}^p(U) \to \mathcal{F}^{p+1}(U)$ определяется формулой $d\omega(u) = (-1)^{p+1}\omega(du)$ для любой $u \in \Lambda_c^{2-p}(U)$.*

В силу предыдущего вычисления для гладкой формы $\widehat{d\omega} = d\widehat{\omega}$.

Рассмотрим теперь мероморфную в области U форму ω с простыми полюсами, т.е. такую, что $\operatorname{ord}_a \omega \geq -1$. Поскольку особенности вида $\frac{1}{z}$ в $\mathbb{C}$ интегрируемы, формула $\widehat{\omega} = \int_U \omega \wedge \cdot$ определяет обобщенную 1-форму на U. Вычислим в этом случае $d_{\mathcal{F}}\widehat{\omega}$.

Для этого возьмем финитную функцию u и обозначим через U_ε область U с вырезанными дисками радиуса ε с центрами в полюсах ω, лежащих в $\operatorname{supp} u$. По определению получаем

$$d\widehat{\omega}(u) = \int\limits_U \omega \wedge du = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{U_\varepsilon} \omega \wedge du \overset{\text{Лейбниц и Стокс}}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\partial U_\varepsilon} -u\omega = 2\pi i \sum_{a \in U} \operatorname*{res}_a \omega \cdot u(a),$$

поскольку в окрестности любой точки $\omega = \frac{2\pi i \operatorname{res}_a \omega}{z}$ + голоморфная форма и $u = u(a) + \overline{o}(1)$.

Таким образом, доказана следующая

Теорема. (Формула Коши–Грина.) *Для любой мероморфной формы ω с простыми полюсами*

$$d_{\mathcal{F}}\widehat{\omega} = 2\pi i \sum_{a \in U} \operatorname*{res}_a \omega \cdot \delta_a \in \mathcal{F}^2(U).$$

Рассмотрим частный случай формы $\omega = \frac{dz}{z-a}$ в $\mathbb{C}$. Это мероморфная форма с единственным простым полюсом в точке a, причем вычет в этой точке равен 1. Таким образом, для любой финитной функции $u = u(z)$ справедлива классическая формула Коши–Грина

$$u(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial u / \partial \overline{z}}{z - a} dz \wedge d\overline{z}.$$

Эту формулу мы позднее используем для решения уравнения $\partial f / \partial \overline{z} = u$ при финитной правой части.

Теорема Коши о вычетах для мероморфной формы с простыми полюсами следует из формулы Коши–Грина. Действительно, нужно применить обе части этой формулы к функции тождественно равной 1 на S. В силу компактности S эта функция финитна, и потому

$$0 = \widehat{\omega}(d1) = d\widehat{\omega}(1) = 2\pi i \sum_{a \in S} \operatorname*{res}_a \omega.$$

Если для $f \in \mathcal{F}^2(S)$, исходя из стандартного вложения, определить $\int_S f = f(1)$, то теорема Коши есть в точности формула Стокса: $\int_S d\widehat{\omega} = 0$.

Замечание. Выше мы доказали теорему Коши о вычетах для произвольной мероморфной формы ω, не обязательно имеющей только простые полюса. Позднее мы покажем, что любая мероморфная форма на S представляется в виде $\omega = \omega_1 + \omega_0$, где форма ω_1 имеет только простые полюса, а вычет формы ω_0 в любой точке равен нулю.

Задача. Доказать справедливость последнего утверждения в $\mathbb{C}$ (это *не компактная* риманова поверхность!) и в $\mathbb{C}P^1$.