Лекция 3: $\overline{\partial}$-оператор и его свойства.

1. С учетом разложения дифференциальных форм по бистепеням дифференциал де Рама определяет отображение $d : \Lambda^{p,q} \to \Lambda^{p+1,q} \oplus \Lambda^{p,q+1}$. Тем самым, мы получаем разложение $d = \partial + \overline{\partial}$.

Оператор $\overline{\partial} : \Lambda^{p,q} \to \Lambda^{p,q+1}$ называется *дифференциалом Дольбо.*

Поскольку $d^2 = 0$, мы немедленно получаем, что $\partial^2 = 0$, $\overline{\partial}^2 = 0$, и $\partial\overline{\partial} + \overline{\partial}\partial = 0$.

Аналогичное разложение имеет место и для обобщенных форм. Можно дать, разумеется, и прямое определение:

$$\overline{\partial}u(\phi) := (-1)^{\deg u+1}u(\overline{\partial}\phi),\ u \in \mathcal{F}^{p,0}(U),\ \phi \in \Lambda_c^{1-p,0}(U).$$

Заметим, что на $(1,0)$-формах $d = \overline{\partial}$, например, для мероморфной формы с простыми полюсами $d\widehat{\omega} = \overline{\partial}\widehat{\omega}$. Рассмотрим теперь в качестве ω логарифмический дифференциал $\eta_f = \frac{df}{f} = \frac{\partial f}{f}$ мероморфной функции $f \in \mathcal{M}(U)$. По формуле Коши–Грина и по определению η_f получаем

$$2\pi i \sum_{a\in U} \operatorname*{ord}_a f \cdot \delta_a = \overline{\partial}\widehat{\eta}_f = \overline{\partial}\frac{\partial f}{f} = \overline{\partial}\frac{\partial(f\overline{f})}{f\overline{f}} = \overline{\partial}\partial \ln |f|^2.$$

Мы воспользовались еще тем, что $\partial\overline{f} = \overline{\overline{\partial} f} = 0$.

Таким образом, справедлива такая

Теорема. (Формула Пуанкаре–Лелона.) *Для любой мероморфной в области U функции $f \not\equiv 0$*

$$\frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\ln|f|^2 = \sum_{a\in U} \operatorname*{ord}_a f \cdot \delta_a \quad \textit{в смысле обобщенных форм в } U.$$

Формальную локально конечную сумму $\sum_{a\in U} \operatorname{ord}_a f \cdot a$, в которую входят нули и полюса f с учетом кратности, называют *дивизором* функции f. В дальнейшем мы убедимся, что формула Пуанкаре–Лелона дает полезное аналитическое выражение для дивизора мероморфной функции.

2. Теперь мы на некоторое время вернемся в $\mathbb{C}$ и займемся решением уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}u = \phi, \quad \phi \in C_c^k(\mathbb{C}),\ k \geq 1. \qquad (*)$$

Для этого введем *оператор Коши*

$$P\phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \frac{\phi(\xi)}{\xi - z} d\xi \wedge d\overline{\xi} = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\phi(\xi)}{\xi - z} d\mu(\xi),$$

где $\phi \in C_c^0(\mathbb{C})$, и $d\mu$ — мера Лебега на $\mathbb{C}$. Интеграл существует, поскольку, как уже отмечалось, особенности вида $\frac{1}{z}$ интегрируемы. Точнее говоря, $\int\limits_{|\xi|\leq r} \frac{d\mu(\xi)}{|\xi|} = 2\pi r < \infty$.

Лемма. *Если $\phi \in C_c^1(\mathbb{C})$, то $u = P\phi$ — решение задачи $(*)$.*

Для доказательства достаточно заметить, что $P\phi(z) = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\phi(\tau+z)}{\tau} d\mu(\tau)$, затем продифференцировать этот интеграл по параметру z и применить формулу Коши–Грина.

Лемма. (Свойства оператора Коши.)

1. *Если существует решение $u = u(z)$ задачи $(*)$ с компактным носителем, то $u = P\phi$.*
2. *Если $\phi \in C_c^k(\mathbb{C})$, $k \geq 0$, то $P\phi \in C^k(\mathbb{C})$.*
3. *Для любого компакта $K \subset\subset \mathbb{C}$ существует константа $C(K)$ такая, что для любой функции ϕ с носителем в K функция $P\phi$ удовлетворяет условию Гельдера вида*

$$|P\phi(z_1) - P\phi(z_2)| \leq C(K)\|\phi\|_{C^0}|z_1 - z_2|^{\frac{1}{3}} \quad \textit{при } |z_1 - z_2| < 1.$$

Второе свойство очевидно. Первое следует из того, что $P\phi(z) \to 0$ при $z \to \infty$, и разность любых двух решений уравнения $(*)$ будет голоморфной функцией.

Задача. Доказать, что решение $(*)$ с компактным носителем существует тогда и только тогда, когда $\int_{\mathbb{C}} z^n \phi(z)\, d\mu(z) = 0$ для любого $n \in \mathbb{Z}_+$.

Наконец, доказательство третьего свойства оператора Коши — непосредственная оценка. Пусть $z_1 = 0$, $z_2 = z$, и $|z| < 1$. Тогда

$$\left| \int_{\mathbb{C}} \left(\frac{\phi(\xi)}{\xi - z} - \frac{\phi(\xi)}{\xi} \right) d\mu(\xi) \right| \le \|\phi\|_{C^0} \int_K \left| \frac{1}{\xi - z} - \frac{1}{\xi} \right| d\mu(\xi).$$

Разобьем компакт K на две части:

$$K_1 = \{\xi \in K \mid |\xi| > |z|^{\frac{1}{3}},\ |\xi - z| > |z|^{\frac{1}{3}}\} \text{ и } K_2 = K \setminus K_1.$$

На K_1, очевидно, имеем $\left|\frac{1}{\xi - z} - \frac{1}{\xi}\right| = \frac{|z|}{|\xi||\xi - z|} < |z|^{\frac{1}{3}}$, следовательно,

$$\|\phi\|_{C^0} \int_{K_1} \left| \frac{1}{\xi - z} - \frac{1}{\xi} \right| d\mu(\xi) \le \|\phi\|_{C^0} \mu(K) |z|^{\frac{1}{3}}.$$

На K_2 оценка уже совсем тупая. А именно,

$$\int\limits_{K_2} \frac{1}{|\xi|} d\mu(\xi) \le \int\limits_{|\xi| \le |z|^{\frac{1}{3}}} + \int\limits_{|\xi - z| \le |z|^{\frac{1}{3}}} \le \int\limits_{|\xi| \le |z|^{\frac{1}{3}}} + \int\limits_{|\xi| \le 2|z|^{\frac{1}{3}}} \le 2\pi |z|^{\frac{1}{3}} + 4\pi |z|^{\frac{1}{3}} \le 6\pi |z|^{\frac{1}{3}}.$$

Симметричным образом

$$\int\limits_{K_2} \frac{1}{|\xi - z|} d\mu(\xi) \le 6\pi |z|^{\frac{1}{3}}.$$

Окончательно, получаем нужную оценку

$$|P\phi(z) - P\phi(0)| \le C(K) \|\phi\|_{C^0} |z|^{\frac{1}{3}}$$

при $|z| < 1$ и $C(K) = \frac{\mu(K)}{\pi} + 12$, что и завершает доказательство свойства (3).

Следствие. *Если $u \in C^1$ — решение задачи $(*)$ с $\phi \in C^\infty$, то $u \in C^\infty$.*

Следствие. *Если $\{\phi_j\}$ — последовательность функций с носителем в $K \subset\subset \mathbb{C}$ и $\|\phi_j\|_{C^k} < C$, то из последовательности $\{P\phi_j\}$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся в C^k на компактах в $\mathbb{C}$.*

Доказательство последнего следствия немедленно получается из гельдеровости и теоремы Арцела–Асколи о равностепенно непрерывных семействах функций.

3. В любой области $U \subset \mathbb{C}$ имеется естественный изоморфизм $\Lambda_c^0(U) \cong \Lambda_c^2(U)$, поэтому удобно рассмотреть пространство классических обобщенных функций $\mathcal{F}(U) = (C_c^\infty(U))^*$.

Стандартное вложение $C^\infty(U) \hookrightarrow \mathcal{F}(U)$ сопоставляет функции f функционал $\widehat{f}(\phi) = \int f\phi\, d\mu$.

Как и в случае обобщенных форм, исходя из этого вложения, для дифференциального оператора D с постоянными коэффициентами положим

$$Df(\phi) = (-1)^{\operatorname{ord} D} f(D\phi).$$

Обобщенные формы на римановой поверхности в каждой локальной координате можно рассматривать как формы с обобщенными коэффициентами. При этом координатное определение дифференциалов де Рама и Дольбо согласовано с данным ранее инвариантным определением.

Введем еще одну операцию на обобщенных функциях. Напомним, что для функций f и g в $\mathbb{C}$, одна из которых имеет компактный носитель, определена их *свертка*

$$f * g(z) = \int_{\mathbb{C}} f(\xi) g(z - \xi)\, d\mu(\xi).$$

Элементарное вычисление показывает, что

$$\int_{\mathbb{C}} f * g(z)\phi(z)d\mu(z) = \int_{\mathbb{C}} f(\xi)\left(\int_{\mathbb{C}} g(\zeta)\phi(\xi+\zeta)\,d\mu(\zeta)\right)\,d\mu(\xi).$$

Таким образом, следует дать такое

Определение. *Пусть $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{C})$, причем g имеет компактный носитель, тогда их свертка есть обобщенная функция*

$$f * g(\phi) = f_z(g_w(\phi(z+w)),$$

где индексы указывают на функции от какой переменной действует обобщенная функция.

Если обобщенная функция f определена только в круге радиуса R, и носитель g содержится в круге радиуса r, то свертка определена в круге радиуса $R - r$.

Лемма. (Свойства свертки.)

1. *Если $g = \widehat{\phi}$ для некоторой финитной функции, то $f * g = f_w(\widehat{\phi(z-w)})$ и является гладкой функцией.*
2. *$\delta_0 * g = g$ и $f * \delta_0 = f$, где δ_0 — дельта-функция в нуле.*
3. *$D(f * g) = Df * g = f * Dg$ для любого дифференциального оператора D с постоянными коэффициентами.*
4. *Свертка непрерывна относительно слабой сходимости обобщенных функций.*

Задача. Доказать эти свойства свертки.

Пример. Пусть ϕ — гладкая финитная сферически симметричная (т.е. $\phi(z) = \phi(|z|)$) функция с $\int_{\mathbb{C}} \phi\,d\mu = 1$. Тогда функции $\phi_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2}\phi(\frac{z}{\varepsilon})$ обладают теми же свойствами, причем носитель ϕ_ε сжимается к 0 при $\varepsilon \to 0$. Легко видеть, что $\phi_\varepsilon \xrightarrow{\text{слабо}} \delta_0$ при $\varepsilon \to 0$.

Таким образом, для любой обобщенной функции f ее *регуляризации* $f_\varepsilon := f * \phi_\varepsilon$ являются гладкими функциями и слабо сходятся к ней. Кроме того, если $Df = 0$, то и $Df_\varepsilon = 0$ для всех $\varepsilon > 0$.

Теорема. (Лемма Вейля.) *Пусть $f \in \mathcal{F}(U)$ и $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = 0$, тогда $f \in \mathcal{O}(U)$.*

Достаточно рассмотреть случай, когда f определена в круге, и мы можем пользоваться регуляризацией. По предыдущему, регуляризации функции f суть обычные голоморфные функции.

Мы утверждаем, что *для любой голоморфной функции g справедливо тождество $g * \phi_\varepsilon = g$* (разумется там, где левая часть определена). Доказательство элементарно: пусть в определении свертки $\xi = z + re^{i\theta}$, тогда по теореме о среднем для голоморфных функций

$$\begin{aligned} g * \phi_\varepsilon(z) &= \iint g(z+re^{i\theta})\phi_\varepsilon(r)r\,d\theta\,dr = \int r\phi_\varepsilon(r)\left(\int g(z+re^{i\theta})\,d\theta\right)dr = \\ &= \int r\phi_\varepsilon(r)\cdot 2\pi g(z)\,dr = g(z)\iint \phi_\varepsilon(r)r\,d\theta\,dr = \\ &= g(z). \end{aligned}$$

Применяя теперь это утверждение к регуляризациям функции f, получим, что $f_\varepsilon = f_\varepsilon * \phi_\delta$. При $\varepsilon \to 0$ правая часть сходится к $f_\delta = f * \phi_\delta$, а левая не зависит от δ. Таким образом, последовательность регуляризаций постоянна, и $f \equiv f_\delta \in \mathcal{O}(U)$.

Задача. Доказать, что обобщенные гармонические функции и обобщенные константы (т.е. решения уравнений $\Delta f = 0$ и $df = 0$ соответственно) на самом деле регулярны и являются обычными гармоническими функциями и константами.