Лекция 4: $\overline{\partial}$-когомологии и двойственность Серра.

1. Рассмотрим оператор $\overline{\partial}^{p,q} : \Lambda^{p,q}(S) \to \Lambda^{p,q+1}$ и определим *$\overline{\partial}$-когомологии* или *когомологии Дольбо* римановой поверхности S

$$H^{p,q}(S) = \frac{\operatorname{Ker}\overline{\partial}^{p,q}}{\operatorname{Im}\overline{\partial}^{p,q-1}}.$$

В частности, $H^{0,0} = \mathcal{O}(S)$ и $H^{0,1}(S) = \Lambda^{0,1}(S)/\overline{\partial}\Lambda^{0,0}(S)$.

Оператор $\overline{\partial} : \Lambda^{0,0}(S) \to \Lambda^{0,1}(S)$ — это непрерывное отображение в C^∞-топологии. По определению сопряженное к нему отображение дает дифференциал Дольбо на обобщенных формах $\overline{\partial}_{\mathcal{F}} : \mathcal{F}^{1,0}(S) \to \mathcal{F}^{0,0}(S)$. Как мы видели, $\operatorname{Coker}\overline{\partial} = H^{0,1}(S)$, а в силу леммы Вейля $\operatorname{Ker}\overline{\partial}_{\mathcal{F}} = \Omega^1(S)$ — пространство голоморфных форм на S. Напомним теперь одно стандартное утверждение из ТФФА.

Лемма. *Пусть $A : V_1 \to V_2$ — непрерывное линейное отображение ЛВП и $\operatorname{Im} A$ замкнут в V_2. Тогда $\operatorname{Ker} A^* = (\operatorname{Coker} A)^*$, где $A^* : V_2^* \to V_1^*$ — сопряженное отображение.*

Двойственность в лемме задается очевидным спариванием $f(\phi + \operatorname{Im} A) = f(\phi)$, $f \in \operatorname{Ker} A^*, \phi \in V_2$.

Итак, если нам удастся доказать, что $\operatorname{Im}\overline{\partial}$ замкнут в $\Lambda^{0,1}(S)$, то получится

Теорема. (Простейшая форма теоремы двойственности Серра.)

На компактной римановой поверхности $\left(H^{0,1}(S)\right)^* = \Omega^1(S)$.

Иначе говоря, для формы $\phi \in \Lambda^{0,1}(S)$ уравнение $\phi = \overline{\partial}u$, $u \in \Lambda^{0,0}(S)$, разрешимо тогда и только тогда, когда $\int_S \omega \wedge \phi = \widehat{\omega}(\phi) = 0$ для любой $\omega \in \Omega^1(S)$.

Приступим теперь к доказательству замкнутости образа $\overline{\partial}$-оператора.

Пусть $\{U_j\}_{j=1}^N$ — конечное координатное покрытие S, $\{\chi_j^2\}$ — подчиненное этому покрытию разбиение единицы и P_j — оператор Коши в U_j, переводящий $(0,1)$-формы с компактным носителем в функции.

Рассмотрим оператор $P = \sum\limits_j \chi_j P_j \chi_j : \Lambda^{0,1}(S) \to \Lambda^{0,0}(S)$.

Утверждение. $P\overline{\partial} = \operatorname{Id} + R$, где оператор R переводит C^k-ограниченную последовательность в последовательность, имеющую C^k-сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство этого утверждения — просто вычисление:

$$P\overline{\partial}\phi = \sum_j \chi_j P_j \chi_j \overline{\partial}\phi = \sum_j \chi_j P_j(\overline{\partial}(\chi_j\phi)) - \sum_j \chi_j P_j(\phi\overline{\partial}\chi_j) = \sum_j \chi_j\chi_j\phi + R\phi = \phi + R\phi,$$

в силу свойств (1) и (3) оператора Коши из предыдущей лекции.

Теперь предположим, что $\overline{\partial}\phi_j \xrightarrow{C^\infty} \xi$ при $j \to \infty$. Мы хотим доказать, что $\xi = \overline{\partial}\phi$ для некоторой функции $\phi \in \Lambda^{0,0}(S)$.

Фиксируем $k > 1$ и разложим пространство $C^k(S)$ в прямую сумму $C^k = \mathcal{O}(S) \oplus M_k$, где M_k — замкнутое подпространство. Это возможно, поскольку $\mathcal{O}(S) \cong \mathbb{C}$ конечномерно. Мы можем считать, что $\phi_j \in M_k$ при всех j.

Предположим сначала, что $\|\phi_j\|_{C^k} \to \infty$, и получим противоречие. Для этого рассмотрим $z_j = \frac{\phi_j}{\|\phi_j\|_{C^k}}$. Очевидно, что $\|z_j\|_{C^k} = 1$ и $\overline{\partial}z_j \xrightarrow{C^\infty} 0$.

Применим теперь оператор P и получим, что

$$\begin{array}{ccccl} P\overline{\partial}z_j & = & z_j + & Rz_j & \\ \downarrow_{C^\infty} & & & \downarrow_{C^k} & \scriptstyle{\text{после перехода}} \\ & & & & \scriptstyle{\text{к подпоследовательности}} \\ 0 & & & -z & \end{array}$$

Таким образом, после перехода к подпоследовательности $z_j \xrightarrow{C^k} z$ при $j \to \infty$. Полученная функция z обладает противоречащими друг другу свойствами: $z \neq 0$, $\overline{\partial}z = 0$ и $z \in M_k$.

Итак, $\|\phi_j\|_{C^k} < C$. Подставляя в предыдущее рассуждение ϕ_j вместо z_j, получим, что существует подпоследовательность $\phi_{j'} \xrightarrow{C^k} \phi$. Ясно, что $\overline{\partial}\phi = \xi$ и $\phi \in C^\infty(S)$ по свойству регулярности оператора $\overline{\partial}$, т.е. $\xi \in \operatorname{Im}\overline{\partial}$, и доказательство теоремы двойственности Серра завершено.

Пример: задача Миттаг–Леффлера. Пусть на римановой поверхности S задана дискретная последовательность точек $a_j \in S$ и мероморфные в окрестности этих точек функции m_j с полюсами только в a_j. *Задача Миттаг–Леффлера* состоит в отыскании такой мероморфной функции $m \in \mathcal{M}(S)$, что функции $m - m_j$ голоморфны. Иначе говоря, необходимо найти мероморфную функцию с заданными *главными частями.*

Поступим следующим образом. Пусть ϕ_j — гладкая функция с носителем в окрестности a_j и тождественно равная 1 около a_j. Положим $f = \sum_j \phi_j m_j$. Очевидно, что $(0,1)$-форма $u = \overline{\partial} f$ равна нулю в проколотой окрестности a_j и продолжается до формы из $\Lambda^{0,1}(S)$. Если существует функция $g \in \Lambda^{0,0}(S)$ такая, что $\overline{\partial} g = u$, то функция $m = f - g$ будет искомым решением задачи Миттаг–Леффлера. Таким образом, по теореме двойственности эта задача разрешима, если для любой формы $\omega \in \Omega^1(S)$ выполнено

$$0 = \int_S \omega \wedge u = \int_{S'} \omega \wedge u = -\int_{\partial S'} \sum_j \phi_j m_j \omega = 2\pi i \sum_j \operatorname*{res}_{a_j} m_j \omega,$$

где S' — поверхность S с вырезанными дисками с центрами в a_j.

В силу теоремы Коши о вычетах это условие является и необходимым для разрешимости задачи Миттаг–Леффлера.

Рассмотрим, например, случай тора $T = \mathbb{C}/\Lambda$. Функции на T — это двоякопериодические функции на $\mathbb{C}$ с периодами Λ. Любая голоморфная форма на T имеет вид $\omega = a(z)dz$, где $a = a(z)$ — двоякопериодическая голоморфная функция, т.е. константа. Главные части m_j суть ряды Лорана $m_j = \sum\limits_{k \geq -N_j} c_k^{(j)} (z - a_j)^k$. Итак, необходимое и достаточное условие разрешимости задачи Миттаг–Леффлера на торе есть $\sum\limits_j c_{-1}^{(j)} = \sum_j \operatorname*{res}\limits_{a_j} m_j dz = 0$.

2. Для того чтобы сформулировать теорему двойственности в более общем виде, и для многих других приложений удобно использовать язык теории пучков.

Определение. *Пусть X — топологическое пространство. Говорят, что на X задан пучок $\mathcal{P}$, если каждому открытому множеству $U \subseteq X$ сопоставлено множество сечений $\mathcal{P}(U)$, а каждой паре открытых множеств $V \subseteq U$ — отображение ограничения $\rho_V^U : \mathcal{P}(U) \to \mathcal{P}(V)$. При этом $\rho_U^U = \mathrm{Id}$, и $\rho_W^V \circ \rho_V^U = \rho_W^U$ при $W \subset V \subset U$. Кроме того, если $U = \bigcup\limits_\alpha U_\alpha$, то*

(П1) *если $s_1, s_2 \in \mathcal{P}(U)$ и $\rho_{U_\alpha}^U s_1 = \rho_{U_\alpha}^U s_2$ для всех α, то $s_1 = s_2$;*

(П2) *если $s_\alpha \in \mathcal{P}(U_\alpha)$ и $\rho_{U_{\alpha\beta}}^{U_\alpha} s_\alpha = \rho_{U_{\alpha\beta}}^{U_\beta} s_\beta$ для всех α, β, то существует такое сечение $s \in \mathcal{P}(U)$, что $\rho_{U_\alpha}^U s = s_\alpha$ для всех α.*

Примеры. Для данного множества P — *постоянный пучок* $P(U) = \{$лок.пост.ф-ции $U \to P\}$. На римановой поверхности определены пучки $\Lambda^{p,q}$ и $\mathcal{F}^{p,q}$ гладких и обобщенных дифференциальных форм, пучок голоморфных функций $\mathcal{O}$, пучок голоморфных форм Ω^1 и т.п.

Если множества $\mathcal{P}(U)$ наделены какой-либо алгебраической структурой, а отображения ограничения являются гомоморфизмами, то пучок называется пучком групп, колец и т.д.

Особо выделим следующую ситуацию. Пусть $\mathcal{R}$ — пучок колец и $\mathcal{P}$ — пучок абелевых групп такой, что $\mathcal{P}(U)$ является $\mathcal{R}(U)$-модулем, и эта структура согласована с ограничениями. В этом случае говорят, что $\mathcal{P}$ является $\mathcal{R}$-модулем. Например, пучки $\Lambda^{p,q}$ или $\mathcal{F}^{p,q}$ будут $\mathcal{O}$-модулями. Очевидным образом, любой пучок абелевых групп является $\mathbb{Z}$-модулем.

Определение. *Морфизм пучков $f : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$ — это набор гомоморфизмов $f_U : \mathcal{P}_1(U) \to \mathcal{P}_2(U)$, согласованных с ограничениями: ${}_2\rho_V^U \circ f_U = f_V \circ {}_1\rho_V^U$.*

Примеры. Дифференциал де Рама является морфизмом пучков векторных пространств, а дифференциал Дольбо — морфизмом $\mathcal{O}$-модулей.

Для пучков можно определять простейшие алгебраические операции, типа прямой суммы: $(\mathcal{P}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{P}_n)(U) = \mathcal{P}_1(U) \oplus \ldots \oplus \mathcal{P}_n(U)$. Так, если $\mathcal{R}$ — пучок модулей, то прямая сумма $\mathcal{R}^n = \underbrace{\mathcal{R} \oplus \ldots \oplus \mathcal{R}}_{n \text{ раз}}$ называется *свободным $\mathcal{R}$-модулем ранга n.*

Определение. *Голоморфным векторным расслоением (или локально свободным пучком) ранга r называют $\mathcal{O}$-модуль $\mathcal{L}$ на римановой поверхности, локально изоморфный $\mathcal{O}^r$.*

Это определение означает, что существует покрытие $S = \bigcup U_\alpha$ и определенные на U_α изоморфизмы $f_\alpha : \mathcal{L} \to \mathcal{O}^r$. На каждом пересечении $U_\alpha \cap U_\beta = U_{\alpha\beta}$ имеем $f_\beta \circ f_\alpha^{-1}\xi = g_{\alpha\beta}\xi$, где функции $g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}(U_{\alpha\beta}, \mathrm{GL}(r, \mathbb{C}))$ называют *матрицами перехода* $\mathcal{L}$. Тем самым, имеется естественный изоморфизм

$$\mathcal{L}(U) = \{(\xi_\alpha)_\alpha \,|\, \xi_\alpha \in \mathcal{O}^r(U_\alpha \cap U) = \mathcal{O}(U_\alpha \cap U, \mathbb{C}^r),\, \xi_\alpha = g_{\beta\alpha}\xi_\beta\}. \tag{$*$}$$

Матрицы перехода, очевидно, удовлетворяют так называемым *условиям коцикла* $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}^{-1}$ и $g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha} = 1$.

Задача. Доказать, что для функций $g_{\alpha\beta}$, удовлетворяющих условию коцикла, формула $(*)$ определяет векторное расслоение.

Для расслоения $\mathcal{L}$ пучок $\mathcal{L}^*(U) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}(U)}(\mathcal{L}(U), \mathcal{O}(U))$ также является векторным расслоением с матрицами перехода $g_{\alpha\beta}^{-1}$. Это расслоение называют *двойственным к $\mathcal{L}$ расслоением.*

Исходя из $(*)$ можно определить для любого $\mathcal{O}$-модуля $\mathcal{G}$ "сечения со значениями в $\mathcal{L}$".

Определение. *Назовем тензорным произведением расслоения $\mathcal{L}$ на $\mathcal{O}$-модуль $\mathcal{G}$ пучок*

$$\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{G}(U) = \{(\xi_\alpha)_\alpha \,|\, \xi_\alpha \in \mathcal{G}^r(U_\alpha \cap U),\, \xi_\alpha = g_{\beta\alpha}\xi_\beta\}.$$

Задача. Доказать, что это определение не зависит от выбора покрытия $\{U_\alpha\}$.

Таким образом получаются пучки $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}} \Lambda^{p,q}$ и $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{F}^{p,q}$ гладких и обобщенных форм с коэффициентами в расслоении $\mathcal{L}$, пучок $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{M}$ мероморфных сечений расслоения $\mathcal{L}$ и т.д.

Пример. Пучок Ω^1 является расслоением ранга 1. Мероморфные формы суть сечения $\Omega^1 \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{M}$.

Задача. Доказать, что для расслоений ранга 1 (или линейных расслоений) $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{L}^* \cong \mathcal{O}$.

Ясно, что морфизм $\mathcal{O}$-модулей $f : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ определяет морфизм $f_{\mathcal{L}} : \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{G}_1 \to \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{G}_2$. В частности, получаем дифференциал Дольбо $\overline{\partial}_{\mathcal{L}}$ на формах с коэффициентами в $\mathcal{L}$.

Итак, мы можем определить *когомологии Дольбо римановой поверхности S с коэффициентами в голоморфном векторном расслоении*:

$$H^{p,q}(S, \mathcal{L}) = \frac{\mathrm{Ker}\, \overline{\partial}_{\mathcal{L}}^{p,q}}{\mathrm{Im}\, \overline{\partial}_{\mathcal{L}}^{p,q-1}}.$$

На пространствах $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}} \Lambda^{p,q}(S)$ очевидным образом можно ввести C^∞-топологию. Сопряженное пространство естественно изоморфно $\mathcal{L}^* \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{F}^{1-p,1-q}(S)$. Отображение, сопряженное к

$$\overline{\partial}_{\mathcal{L}} : \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}} \Lambda^{0,0} \to \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}} \Lambda^{0,1},$$

есть в точности

$$\left(\overline{\partial}_{\mathcal{F}}\right)_{\mathcal{L}^*} : \mathcal{L}^* \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{F}^{1,0} \to \mathcal{L}^* \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{F}^{1,1}.$$

Доказательство теоремы двойственности Серра, данное выше для $\mathcal{L} = \mathcal{O}$, проходит теперь *mutatis mutandis*, если доказана

Лемма. *Если $\mathcal{L}$ — голоморфное векторное расслоение, то пространство $\mathcal{L}(S)$ конечномерно.*

Для доказательства леммы рассмотрим это пространство с C^0-нормой. По теореме Монтеля оно локально компактно и по классической теореме Рисса конечномерно.

Теорема. (Двойственность Серра для голоморфных векторных расслоений.)
Имеется двойственность конечномерных векторных пространств

$$\mathcal{L}^* \otimes_{\mathcal{O}} \Omega^1(S) \cong \left(H^{0,1}(S, \mathcal{L})\right)^*.$$

Следствие. (Случай $\mathcal{L} = \Omega^1$.) *Для $(1,1)$-формы ω уравнение $\omega = \overline{\partial} u$ разрешимо тогда и только тогда, когда $\widehat{1}(\omega) = \int\limits_S \omega = 0$.*

Задача. (Миттаг–Леффлер для мероморфных форм.) Мероморфная на S форма, имеющая только простые полюса в точках $a_1, \ldots, a_n \in S$ с вычетами $c_1, \ldots, c_n$, существует тогда и только тогда, когда $\sum_{j=1}^n c_j = 0$. Тем самым, любая мероморфная форма есть сумма формы с простыми полюсами и формы без вычетов.