Лекция 6: Теорема Римана–Роха.

1. Начнем со связи между когомологиями Дольбо римановой поверхности и когомологиями с постоянными коэффициентами. Напомним, что для римановой поверхности S рода g, т.е. сферы с g ручками

$$H^m(S,\mathbb{C}) = \begin{cases} \mathbb{C}, & \text{при } m=0,2 \\ \mathbb{C}^{2g}, & \text{при } m=1 \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

В частности, *топологическая эйлерова характеристика* $\chi(S) := \chi(S,\mathbb{C}) = 2-2g$.

Рассмотрим теперь точную тройку пучков на S

$$0 \to \mathbb{C} \to \mathcal{O} \xrightarrow{d} \Omega^1 \to 0.$$

По свойству аддитивности эйлеровой характеристики получаем, что $\chi(\mathbb{C})-\chi(\mathcal{O})+\chi(\Omega^1)=0$. Но по теореме двойственности Серра $\chi(\mathcal{O}) = -\chi(\Omega^1) = 1-\dim_{\mathbb{C}}\Omega^1(S)$. Таким образом, получается следующая

Теорема. (Теорема Римана) *На компактной римановой поверхности* $\dim_{\mathbb{C}}\Omega^1(S) = g$, *т.е. имеется ровно* g *линейно независимых голоморфных форм.*

Рассмотрим теперь отображение $\Omega^1(S)\oplus\overline{\Omega^1(S)} \to H^1(S,\mathbb{C})$, сопоставляющее каждой форме вида $\omega_1+\overline{\omega_2}$ ее класс когомологий де Рама. Это отображение определено корректно, поскольку голоморфные и антиголоморфные формы замкнуты. Кроме того, оно является *вложением.* Действительно, если $\omega_1+\overline{\omega_2}=d\psi$, то $\omega_1=\partial\psi$, значит, $\overline{\partial}\partial\psi=0$, т.е. функция ψ — гармоническая. По принципу максимума $\psi=\text{const.}$, следовательно, $d\psi=0$, что и требовалось. Таким образом, наше отображение — вложение векторных пространств одинаковой размерности и потому изоморфизм.

Теорема. *На компактной римановой поверхности* S *имеет место разложение Ходжа*

$$H^1(S,\mathbb{C}) \cong \Omega^1(S)\oplus\overline{\Omega^1(S)}.$$

Задача. На компактной римановой поверхности $\overline{\Omega^1(S)} \cong H^{0,1}(S)$.

2. *Дивизором* в области $U\subseteq S$ называется локально конечная сумма $D=\sum_{a\in U} n_a\cdot a$, где $n_a\in\mathbb{Z}$. Дивизоры в области U образуют абелеву группу $\mathcal{D}(U)$.

Каждой мероморфной функции $f\not\equiv 0$ можно сопоставить ее дивизор

$$\operatorname{div} f = \sum_{a\in U} \operatorname*{ord}_a f\cdot a.$$

Тем самым определен гомоморфизм $\operatorname{div} : \mathcal{M}^*(U)\to\mathcal{D}(U)$ из мультипликативной группы не равных тождественно нулю мероморфных функций в группу дивизоров.

Дивизор вида $D=\operatorname{div} f$ называется *главным* или *линейно эквивалентным нулю.* Функция f в этом случае называется определяющей функцией для D. Очевидно, что *локально* любой дивизор является главным. Пусть $\operatorname{Cl}(S) = \frac{\mathcal{D}(S)}{\operatorname{Im}\operatorname{div}}$ — группа классов линейной эквивалентности дивизоров на S.

Рассмотрим теперь чуть более общую ситуацию. Пусть $\mathcal{L}$ — голоморфное линейное расслоение, заданное на покрытии $\{U_\alpha\}$ функциями перехода $g_{\alpha\beta}\in\mathcal{O}^*(U_{\alpha\beta})$, где $\mathcal{O}^*$ — мультипликативный пучок необращающихся в ноль голоморфных функций. Пусть $m=(m_\alpha)$, $m_\alpha\in\mathcal{M}(U_\alpha\cap U)$, $m_\alpha = g_{\beta\alpha}m_\beta$, — мероморфное сечение расслоения $\mathcal{L}$ на U. Определим дивизор этого сечения, полагая

$$\operatorname{div} m = \operatorname{div} m_\alpha \quad \text{в каждом } U_\alpha.$$

Поскольку любые два мероморфных сечения $\mathcal{L}$ получаются друг из друга умножением на мероморфную функцию, их дивизоры линейно эквивалентны. Итак, линейное расслоение, имеющее мероморфное сечение, определяет некоторый класс дивизоров из $\operatorname{Cl}(S)$.

Если D_1, D_2 — два дивизора в области U, то $D_1\geq D_2$, если $n_a(D_1)\geq n_a(D_2)$ для всех $a\in U$. Дивизор D такой, что $D\geq 0$, называют *эффективным.* Очевидно, что локальная определяющая функция эффективного дивизора голоморфна.

Построим теперь по каждому классу дивизоров на S некоторое линейное расслоение. Для любого $D \in \mathcal{D}(S)$, определим пучок $\mathcal{O}(D)$ сопоставлением

$$U \to \{f \in \mathcal{M}(U) \mid \operatorname{div} f + D \geq 0\}.$$

Если $m \in \mathcal{M}(V)$ — локальная определяющая функция для D, то отображение $f \to m \cdot f$ определяет на V изоморфизм $\mathcal{O}(D) \cong \mathcal{O}$, т.е. $\mathcal{O}(D)$ действительно будет локально свободным пучком ранга 1.

Если $\{U_\alpha\}$ — такое покрытие S, что $D = \operatorname{div} m_\alpha$ в каждом U_α, то по определению расслоение $\mathcal{O}(D)$ задается функциями перехода $g_{\alpha\beta} = \frac{m_\beta}{m_\alpha}$. Поскольку сумме дивизоров соответствует произведение определяющих функций, отсюда следует, что $\mathcal{O}(D_1 + D_2) = \mathcal{O}(D_1) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(D_2)$. Кроме того, набор (m_α) задает мероморфное сечение $\mathcal{O}(D)$ с дивизором D, следовательно, класс линейной эквивалентности дивизоров мероморфных сечений $\mathcal{O}(D)$ есть в точности класс дивизора D. В частности, если $\mathcal{O}(D_1) \cong \mathcal{O}(D_2)$, то D_1 и D_2 линейно экивалентны.

Итак, мы определили вложение групп

$$\operatorname{Cl}(S) \ni [D] \hookrightarrow \mathcal{O}(D) \in \operatorname{Pic}(S),$$

где $\operatorname{Pic}(S)$ — *группа Пикара* римановой поверхности S, т.е. группа линейных расслоений с операцией тензорного уиножения. Образ этого вложения состоит из расслоений, имеющих мероморфное сечение. На самом деле, таковы все линейные расслоения на S, как показывает следующее стандартное рассуждение.

Пусть $\mathcal{L}$ — линейное расслоение на S. Выберем точку $P \in S$ и целое $m > 0$. Пусть тогда $\mathcal{L}_{mP} := \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(mP)$ — линейное расслоение, сечения которого суть мероморфные сечения $\mathcal{L}$, имеющие полюс только в точке $P \in S$ порядка $\leq m$. Имеется очевидная точная тройка пучков

$$0 \to \mathcal{L} \to \mathcal{L}_{mP} \to \mathbb{C}^m_P \to 0,$$

где $\mathbb{C}^m_P$ — пучок $\mathbb{C}^m$-значных функций, равных нулю всюду кроме точки P.

Из конструкции когомологий Чеха ясно, что $H^0(\mathbb{C}^m_P) = \mathbb{C}^m$ и $H^p(\mathbb{C}^m_P) = 0$ при $p > 0$. Следовательно, по свойству эйлеровой характеристики

$$\chi(\mathcal{L}_{mP}) = \chi(\mathcal{L}) + m. \tag{$*$}$$

Выбирая m достаточно большим, мы получаем, что $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}_{mP}(S) \geq \chi(S, \mathcal{L}_{mP}) > 0$. Итак, у расслоения $\mathcal{L}$ есть ненулевое мероморфное сечение с полюсом только в P, что и требовалось.

Подведем итог:

Теорема. *На компактной римановой поверхности отображение $D \to \mathcal{O}(D)$ определяет изоморфизм $\operatorname{Cl}(S) \cong \operatorname{Pic}(S)$ группы классов линейной эквивалентности дивизоров и группы линейных расслоений.*

Важный пример. *Каноническим классом* римановой поверхности S называют класс $\mathcal{K}$ линейной эквивалентности дивизоров D таких, что $\mathcal{O}(D) \cong \Omega^1$. Иначе говоря, канонический класс состоит из дивизоров мероморфных форм.

Задача. Доказать, что любое голоморфное векторное расслоение имеет мероморфное сечение. Вывести отсюда, что у любого векторного расслоения есть линейное подрасслоение.

3. Пусть $D = \sum_{j=1}^n n_j \cdot a_j \in \mathcal{D}(S)$, тогда *степенью дивизора* D называют число $\deg D = \sum_{j=1}^n n_j$. Степень главного дивизора $\deg \operatorname{div} f = \sum_{a \in S} \operatorname{ord}_a f = 0$, поэтому степени линейно эквивалентных дивизоров равны, и корректно следующее

Определение. *Пусть $\mathcal{L} = \mathcal{O}(D) \in \operatorname{Pic}(S)$, тогда $\deg \mathcal{L} = \deg D$.*

Иначе говоря, степень линейного расслоения — это число нулей и полюсов любого его мероморфного сечения с учетом кратности.

Теперь с помощью равенства $(*)$ выше нетрудно выразить эйлерову характеристику линейного расслоения через его степень.

Теорема. (Формула Римана–Роха.) *Пусть $\mathcal{L}$ — линейное расслоение на компактной римановой поверхности S рода g, тогда*

$$\chi(S, \mathcal{L}) = \deg \mathcal{L} - g + 1.$$

Доказательство обманчиво просто. Во-первых, формула верна для $\mathcal{L} = \mathcal{O}$ по теореме Римана. Во-вторых, в силу формулы $(*)$ формула Римана–Роха верна одновременно для линейных расслоений $\mathcal{L} = \mathcal{O}(D)$ и $\mathcal{L} = \mathcal{O}(D \pm P)$. Поскольку любое линейное расслоение можно получить из $\mathcal{O}$ таким способом, теорема доказана.

Задача. Индукцией по рангу для векторного расслоения $\mathcal{L}$ ранга r доказать формулу Римана–Роха $\chi(S, \mathcal{L}) = \deg(\det \mathcal{L}) - r(g-1)$, где $\det \mathcal{L}$ — линейное расслоение, функции перехода которого суть определители матриц перехода $\mathcal{L}$.

Для того, чтобы придать формуле Римана–Роха более классический вид, для дивизора D (или его класса линейной эквивалентности) введем такие обозначения и названия

$\ell(D) := \dim_{\mathbb{C}} H^0(S, \mathcal{O}(D))$ — число $\ell(D) - 1$ это "размерность линейной системы $|D|$"
$i(D) := \ell(\mathcal{K} - D) = \dim_{\mathbb{C}} H^0\left(S, \Omega^1 \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(-D)\right)$ — "иррегулярность дивизора D"

По теореме двойственности Серра $i(D) = \dim_{\mathbb{C}} H^1(S, \mathcal{O}(D))$. Таким образом, формулу Римана–Роха можно записать в виде

$$\ell(D) - \ell(\mathcal{K} - D) = \ell(D) - i(D) = \deg D - g + 1.$$

Применяя эту формулу при $D = \mathcal{K}$, получаем

Следствие. *Степень канонического класса есть* $\deg \mathcal{K} = 2g - 2$.

Формулу Римана–Роха удобно использовать вместе со следующим очень простым, но важным утверждением.

Теорема. *Если* $\deg \mathcal{L} < 0$, *то* $\mathcal{L}(S) = 0$.

Действительно, если у $\mathcal{L}$ есть нетривиальное голоморфное сечение, то степень дивизора этого сечения равна степени $\mathcal{L}$ и неотрицательна.

Пример: случай $g = 0$. Пусть S — риманова поверхность рода ноль и $P \in S$. Тогда степень $\deg(\mathcal{K} - P) = -3$ и по предыдущей теореме $i(P) = 0$. Таким образом, $\ell(P) = 1 - g + 1 = 2$, значит, существует функция $f \in \mathcal{M}(S)$, имеющая единственный полюс первого порядка в точке P. Такая функция принимает каждое значение ровно один раз и задает изоморфизм $S \cong \mathbb{C}P^1$.

Теорема. $\mathbb{C}P^1$ *— единственная риманова поверхность рода* 0.

У этого утверждения есть одно любопытное дифференциально–топологическое следствие.

Напомним, что множество классов изоморфизма комплексных структур на ориентированной поверхности S есть $\mathfrak{M}(S) = \left[Met(S)/\overset{conf}{\sim}\right] / \operatorname{Diff}_+(S)$. Пространство $AC(S) = Met(S)/\overset{conf}{\sim}$ классов конформной эквивалентности римановых метрик на S очевидным образом стягиваемо и изоморфно пространству почти комплексных структур, согласованных с данной ориентацией.

Пусть теперь $S = S^2$ — двумерная сфера. Мы доказали, что $\mathfrak{M}(S)$ состоит из единственной точки, соответствующей $\mathbb{C}P^1$. Заметим, что группа диффеоморфизмов, сохраняющих эту комплексную структуру, есть группа дробно-линейных преобразований $P\,\mathrm{GL}(1, \mathbb{C})$. В частности, если заданы три различные точки $a_0, b_0, c_0 \in S$, то существует единственный такой диффеоморфизм $\phi_{a,b,c}$, переводящий эти три точки в точки a, b и c соответственно.

Итак, если зафиксировать $J_0 \in AC(S)$ и точки $a_0, b_0, c_0 \in S$, то отображение

$$\operatorname{Diff}_+(S) \ni \psi \longrightarrow (\phi_{\psi(a_0),\psi(b_0),\psi(c_0)}, \psi^* J_0) \in P\,\mathrm{GL}(1, \mathbb{C}) \times AC(S)$$

является гомеоморфизмом. Следовательно, группа диффеоморфизмов $\operatorname{Diff}_+(S)$ гомотопически эквивалентна группе $P\,\mathrm{GL}(1, \mathbb{C})$ и, в частности, связна.

Теорема. *Любой сохраняющий ориентацию диффеоморфизм сферы S^2 изотопен (т.е. гомотопен в классе диффеоморфизмов) тождественному отображению.*

Задача. Группа $P\,\mathrm{GL}(1, \mathbb{C})$ гомотопически эквивалентна группе $SO(3)$ изометрий стандартной двумерной сферы. Тем самым, $\operatorname{Diff}_+(S^2) \sim SO(3)$.