Лекция 7: Теоремы Абеля и Якоби.

1. Сейчас мы займемся решением *задачи Вейерштрасса*: пусть задан дивизор $D \in \mathcal{D}(S)$, найти условия, при которых он является дивизором некоторой мероморфной функции.

Простейшее необходимое условие $\deg D = 0$ не является, вообще говоря, достаточным. Пусть, например, $D = P - Q$, где P и Q — различные точки на римановой поверхности S рода $g > 0$. Функция с таким дивизором определяла бы изоморфизм $S \cong \mathbb{C}P^1$, что невозможно.

Задача. Дивизор на $\mathbb{C}P^1$ степени нуль является главным.

Разрешимость задачи Вейерштрасса для дивизора D эквивалентна тому, что $\mathcal{O}(D) \cong \mathcal{O}$. Заметим теперь, что группа Пикара $\mathrm{Pic}(S)$ изоморфна группе когомологий $H^1(S, \mathcal{O}^*)$ — нужно сопоставить линейному расслоению класс когомологий коцикла, образованного его функциями перехода $g_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}^*(U_{\alpha\beta})$.

Рассмотрим *экспоненциальную точную тройку пучков* на римановой поверхности:

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O} \xrightarrow{e^{2\pi i \cdot}} \mathcal{O}^* \to 0$$

Соответствующая точная когомологическая последовательность дает точную последовательность групп

$$0 \to H^1(S, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\iota} H^1(S, \mathcal{O}) \xrightarrow{\exp} H^1(S, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{\delta^1} H^2(S, \mathbb{Z}) \to 0$$

Отметим, что если класс линейного расслоения $\mathcal{L}$ лежит в образе $\exp$, то степень этого расслоения равна нулю. В этом можно убедиться, например, так. Пусть $\mathcal{L}$ задано функциями перехода $g_{\alpha\beta} = e^{2\pi i \psi_{\alpha\beta}}$. Существуют *гладкие* функции ϕ_α такие, что $\phi_\beta - \phi_\alpha = \psi_{\alpha\beta}$. Следовательно, если $m = (m_\alpha)$ — мероморфное сечение $\mathcal{L}$, то $f := e^{-2\pi i \phi_\alpha} m_\alpha$ — корректно определенное отображение $S \to \mathbb{C}P^1$. Число нулей и число полюсов сечения m равны степени f и потому равны между собой, что и требовалось.

Обратно, если $\deg \mathcal{L} = 0$, то в следующем пункте мы явно опишем классы из $\exp^{-1} \mathcal{L}$.

Замечание. В действительности связывающий гомоморфизм $\delta^1 : H^1(S, \mathcal{O}^*) \to H^2(S, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ совпадает со взятием степени линейного расслоения. В дальнейшем мы докажем это простое утверждение в надлежащем контексте.

Итак, решение задачи Вейерштрасса сводится к описанию образа отображения ι в $H^1(S, \mathcal{O})$. Раскладывая это отображение в композицию $H^1(S, \mathbb{Z}) \hookrightarrow H^1(S, \mathbb{C}) \to H^1(S, \mathcal{O})$, мы видим, что оно устроено следующим образом: представляем класс из $H^1(S, \mathbb{Z})$ замкнутой 1-формой u и берем класс когомологий Дольбо ее $(0,1)$-части $u^{0,1}$.

Остается выбрать удобный способ вычисления для всех используемых когомологий.

2. Сейчас мы посмотрим на теорию сингулярных гомологий и двойственность Пуанкаре с точки зрения обобщенных форм. Так нам будет удобнее переходить к когомологиям Чеха и когомологиям Дольбо.

Пусть γ — кусочно-гладкая ориентированная кривая на S. Тогда она определяет обобщенную 1-форму $\hat{\gamma}(u) := \int_\gamma u$. Очевидно, что если γ соединяет точку P с точкой Q, то

$$d\hat{\gamma}(f) := \int_\gamma df = f(Q) - f(P) = (\delta_Q - \delta_P)(f).$$

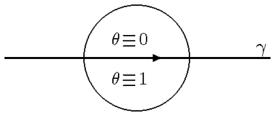
Итак, форма $\hat{\gamma}$ замкнута тогда и только тогда, когда замкнута в обычном смысле кривая γ.

По (абстрактной) теореме де Рама когомологии де Рама, так же, как и когомологии Дольбо, можно с равным успехом представлять как гладкими, так и обобщенными формами. Таким образом, любая замкнутая кривая представляет некоторый класс из $H^1(S, \mathbb{C})$.

Задача. Доказать точность обобщенного комплекса пучков де Рама, т.е. доказать, что для d-замкнутой обобщенной формы u локально разрешимо уравнение $df = u$. (Указание: использовать фундаментальное решение для $\frac{d}{dx}$ на $\mathbb{R}$ — так называемую функцию Хевисайда.)

Найдем теперь коцикл Чеха, представляющий тот же класс когомологий, что и кривая γ. Напомним, что для этого нужно выбрать покрытие $\{U_\alpha\}$ так, что $\hat{\gamma} = d\theta_\alpha$ в U_α, и положить $c_{\alpha\beta} = \theta_\beta - \theta_\alpha$.

Это сделать очень легко:



функция $\theta = \begin{cases} 0 & \text{“над” } \gamma \\ 1 & \text{“под” } \gamma \end{cases}$ дает решение $d\theta = \hat\gamma$

Отсюда следует, например, что класс $[\hat\gamma] \in H^1(S,\mathbb{Z})$ для любой замкнутой кривой γ.

Напомним, что на $H^1(S,\mathbb{C})$ определена невырожденная кососимметричная *форма Пуанкаре*

$$[u]\cdot[v] := \int_S u\wedge v, \qquad u,v\in\Lambda^1(S).$$

Задача. Вывести невырожденность этой формы из разложения Ходжа.

Для замкнутой кривой, очевидно, $[\hat\gamma]\cdot[v] = \int_\gamma v$. Выразим этот интеграл с помощью когомологий Чеха. Для этого рассмотрим покрытие дисками $\{U_j\}_{j=1}^n$ с центрами на γ, и пусть $v = df_j$ в U_j. Пусть диски упорядочены в направлении ориентации на γ и $x_j\in U_{j+1}\cap U_j$. По формуле Ньютона–Лейбница

$$\int_\gamma v = \sum_j f_j(x_{j+1}) - f_j(x_j) = \sum_j f_{j-1}(x_j) - f_j(x_j) = \sum_j c_{j,j-1},$$

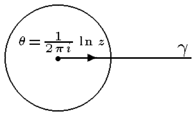
где коцикл $(c_{j,j-1})$ представляет класс $[v]$. Отсюда следует, что если $c\in H^1(S,\mathbb{Z})$, то для любой замкнутой кривой $[\hat\gamma]\cdot c\in\mathbb{Z}$. Кроме того, если класс $[v]$ представлен трансверсальной к γ кривой τ, то из определенного выше вида соответствующего $\hat\tau$ чеховского коцикла ясно, что

$$[\hat\gamma]\cdot[\hat\tau] = \sum_{x\in\gamma\cap\tau}(\text{индекс пересечения } \gamma \text{ и } \tau \text{ в точке } x). \qquad (*)$$

Склеим теперь поверхность S из некоторого $4g$-угольника. Его стороны после склейки дадут $2g$ замкнутых кривых, классы которых определяют базис в $H^1(S,\mathbb{C})$. Матрица формы Пуанкаре в этом базисе состоит из блоков $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}$ в силу формулы $(*)$ и *унимодулярна*. Следовательно, любой класс из $H^1(S,\mathbb{Z})$ есть *целочисленная* линейная комбинация классов этих кривых.

Фактически это означает, что все классы из $H^1(S,\mathbb{Z})$ представляются замкнутыми кривыми, поскольку сумме классов соответствует связная сумма кривых, а умножению класса на (-1) — обращение ориентации на кривой.

Рассмотрим, наконец, когомологии Дольбо. Для любой (не обязательно замкнутой) кривой γ обобщенная форма $\hat\gamma^{0,1}$ определяет некоторый класс из $H^{0,1}(S)\cong H^1(S,\mathcal{O})$. Для того, чтобы выразить этот класс с помощью когомологий Чеха, нужно локально решить уравнение $\overline{\partial}\theta = \hat\gamma^{0,1}$. Нам остается рассмотреть только случай, когда кривая γ имеет конец, поскольку иначе мы знаем даже локальное решение $d\theta = \hat\gamma$. Итак:



функция $\theta =$ (ветвь $\frac{1}{2\pi i}\ln z$ в $U\setminus\gamma$) дает решение $\overline{\partial}\theta = \hat\gamma^{0,1}$

Теперь для кривой, соединяющей точку P с точкой Q, по определению exp мы получаем $\exp([\hat\gamma^{0,1}]) = [e^{2\pi i(\theta_\beta-\theta_\alpha)}] = [\frac{m_\beta}{m_\alpha}]$, где m_α — локальная определяющая функция дивизора $P-Q$. Отсюда $\exp([\hat\gamma^{0,1}]) = \mathcal{O}(D)$. Поскольку добавление класса вида $\iota(z)$, $z\in H^1(S,\mathbb{Z})$, сводится к добавлению классов вида $[\hat\tau^{0,1}]$, где τ — замкнутая кривая, мы получаем основной результат:

Лемма. (Обращение exp.) *Пусть $P,Q\in S$, тогда $\exp^{-1}(\mathcal{O}(P-Q))\subset H^1(S,\mathcal{O})$ состоит из классов вида $[\hat\gamma^{0,1}]$ для кусочно гладких кривых γ, соединяющих P с Q.*

3. Нужное нам решение задачи Вейерштрасса получается из предыдущей леммы простым применением двойственности Серра.

Теорема (Абель). *Дивизор $D = \sum_{j=1}^n P_j - \sum_{j=1}^n Q_j$ степени ноль на компактной римановой поверхности S является главным тогда и только тогда, когда существуют такие кривые γ_j, соединяющие точку P_j с точкой Q_j, что для любой голоморфной формы $\omega \in \Omega^1(S)$*

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} \omega = 0.$$

Пример. Пусть $S = \mathbb{C}/\Lambda$ — комплексный тор. Обозначим сложение и вычитание точек на таком торе символами $\overset{t}{+}$ и $\overset{t}{-}$. Условие теоремы Абеля означает, что

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \int_{P_j}^{Q_j} dz \equiv \sum_{j=1}^{n} Q_j \overset{t}{-} P_j \mod \Lambda.$$

Таким образом, дивизор на торе линейно эквивалентен нулю тогда и только тогда, когда сумма его точек равна нулю в смысле сложения на торе.

Рассмотрим теперь на римановой поверхности S рода g пространство $\Omega(S)^* \cong H^1(S, \mathcal{O})$. Линейные функционалы вида $\omega \to \int_\gamma \omega$, где γ — замкнутая кривая, образуют в нем решетку $\Gamma \cong \iota\left(H^1(S, \mathbb{Z})\right)$. Факторпространство (некоторый g-мерный комплексный тор)

$$\mathrm{Jac}(S) := \frac{\Omega(S)^*}{\Gamma} \cong \frac{H^1(S, \mathcal{O})}{H^1(S, \mathbb{Z})}$$

называется *якобианом римановой поверхности S*.

Теорема Абеля утверждает, что инъективен гомоморфизм

$$\mathrm{Cl}_0(S) \ni D = \sum_{j=1}^{n} P_j - \sum_{j=1}^{n} Q_j \longrightarrow \int_{P_j}^{Q_j} \mod \Gamma \in \mathrm{Jac}(S)$$

из группы классов линейной эквивалентности дивизоров степени ноль на S в якобиан римановой поверхности S. На самом деле, как следует из точной экспоненциальной последовательности, это изоморфизм. Явную и более точную форму утверждения о его сюръективности дает следующая

Теорема (Якоби). *Пусть $\ell \in \Omega(S)^*$ и $P_0 \in S$. Тогда найдутся (не обязательно различные) точки $P_1, \ldots, P_g \in S$ такие, что*

$$\ell \equiv \sum_{j=1}^{g} \int_{P_0}^{P_j} \mod \Gamma.$$

Для доказательства будем сразу считать, что $\ell \in H^1(S, \mathcal{O})$, и рассмотрим линейное расслоение $\mathcal{L} = \exp(-\ell)$ степени ноль. По формуле Римана–Роха $\chi(\mathcal{L}_{gP_0}) = g - g + 1 = 1$, следовательно, у расслоения $\mathcal{L}_{gP_0}$ есть нетривиальное голоморфное сечение σ. Дивизор этого сечения и дает нам требуемые g точек, поскольку $\mathcal{L} = \mathcal{O}(\operatorname{div}\sigma - gP_0)$ и мы можем применить лемму об обращении отображения exp.

Важный пример: римановы поверхности рода 1. Если род S равен единице, то $\mathrm{Jac}(S)$ — это одномерный комплексный тор. По теоремам Абеля и Якоби для любой точки $P_0 \in S$ голоморфное отображение

$$S \ni P \longrightarrow \int_{P_0}^{P} \mod \Gamma \in \mathrm{Jac}(S)$$

является изоморфизмом. Следовательно, справедлива

Теорема. *Любая риманова поверхность рода 1 есть некоторый тор $\mathbb{C}/\Lambda$.*