**Лекция 8: Компактные римановы поверхности и алгебраические кривые.**

**1.** Отображением $f : S \to M$ римановой поверхности в комплексное многообразие называется голоморфным, если в каждых локальных координатах оно задается голоморфными функциями.

Начнем со случая отображения $f : S_1 \to S_2$ одной римановой поверхности в другую. Если отображение $f$ не постоянно и $P \in S_1$, то можно так выбрать локальные координаты в окрестности $P$ и $f(P)$, что

$$w = f(z) = z^k \text{ для некоторого целого } k > 0.$$

Число $k = \operatorname{ord}_P f$ называется *порядком* отображения $f$ в точке $P$, а число $k - 1 = \operatorname{ind}_P f$ — *индексом ветвления* $f$ в точке $P$. Ясно, что это определение не зависит от выбора локальных координат.

Легко видеть, что функция $n(y) = \sum\limits_{x | f(x)=y} \operatorname{ord}_x f$ локально постоянна и, значит, постоянна на $S_2$. Полученное натуральное число $\deg f$ (число прообразов произвольной точки с учетом кратности) называют *степенью* отображения $f$. Очевидно, что это то же самое, что и степень $f$ как гладкого (или непрерывного) отображения.

Введем еще *множества ветвления*

$$B_1 = \{x \in S_1 \mid \operatorname{ind}_x f > 0\} \qquad \text{и} \qquad B_2 = f(B_1)$$

Ограничение $f : S_1 \setminus B_1 \to S_2 \setminus B_2$ является, очевидно, $\deg f$-листным накрытием.

Как и следовало ожидать, степень и индексы ветвления отображения $f$ связаны с топологией $S_1$ и $S_2$. Чтобы получить такое соотношение, рассмотрим мероморфную форму $\omega$ на $S_2$. Если локально $\omega = a(w)dw$ и $w = f(z) = z^k$, то обратный образ формы $\omega$ имеет локальное выражение $f^*\omega = a(z^k)kz^{k-1}dz$, следовательно,

$$\deg \operatorname{div} f^*\omega = \deg f \cdot \deg \operatorname{div} \omega + \sum_{x \in S_1} \operatorname{ind}_x f.$$

Но степень дивизора мероморфной формы на римановой поверхности $S$ равна степени канонического класса и равна $2g - 2$, где $g$ — род $S$. Итак, получается важная

**Теорема.** (Формула Римана–Гурвица.) *Пусть $f : S_1 \to S_2$ — непостоянное голоморфное отображение компактных римановых поверхностей, тогда*

$$2g(S_1) - 2 = \deg f \cdot (2g(S_2) - 2) + \sum_{x \in S_1} \operatorname{ind}_x f.$$

**2.** Непостоянное голоморфное отображение римановых поверхностей индуцирует вложение полей мероморфных функций $f^* : \mathcal{M}(S_2) \hookrightarrow M(S_1)$, $f^*(\psi) := \psi \circ f$.

**Теорема.** *Расширение $M(S_1) \supset f^*M(S_2)$ алгебраическое степени $\deg f$.*

Докажем сначала, что любая функция $g \in \mathcal{M}(S_1)$ удовлетворяет уравнению степени не выше $\deg f$ с коэффициентами вида $h \circ f$, $h \in \mathcal{M}(S_2)$.

Заметим, что в некоторой окрестности произвольной точки $P \notin B_2$ найдутся $n = \deg f$ отображений $y_j : U(P) \to S_1$ таких, что $f \circ y_j = \mathrm{Id}$ и $f^{-1}(P) = \{y_j(P)\}_{j=1}^n$. Эти отображения определены с точностью до перестановки.

Обозначим через $\sigma_j$ элементарные симметрические многочлены от $n$ переменных и положим $h_j := (-1)^j \sigma_j(g(y_1), \dots, g(y_n))$. В силу симметричности функции $h_j$ мероморфно продолжаются на $S_2 \setminus B_2$, а по теореме Римана о продолжении — на всю поверхность $S_2$. Но по теореме Виета

$$\sum_{j=0}^{n} h_j(f) \cdot g^{n-j} \equiv 0,$$

что и требовалось получить.

Остается предъявить функцию, удовлетворяющую уравнению степени ровно $\deg f$. Для этого достаточно выбрать точку $P \in S_2$, имеющую ровно $\deg f$ прообразов (т.е. лежащую в $S_2 \setminus B_2$), и построить мероморфную функцию на $S_1$, принимающую в этих прообразах различные значения. Это частный случай более общего утверждения:

**Лемма.** *Пусть $P_1, \ldots, P_k \in S$ — попарно различные точки на компактной римановой поверхности, тогда найдется мероморфная функция, принимающая в этих точках любые заданные значения.*

Прежде чем доказывать эту лемму (а вместе с ней и теорему), сделаем важное отступление:

**Теорема.** (Об обращении в нуль.) *Пусть $\mathcal{L} = \mathcal{O}(\mathcal{D})$ — линейное расслоение на компактной римановой поверхности $S$ рода $g$. Если $\deg \mathcal{L} > 2g-2$, то $H^1(S, \mathcal{L}) = 0$.*

Действительно, $\dim_{\mathbb{C}} H^1(S, \mathcal{L}) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(S, \Omega \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{L}^*) = \ell(\mathcal{K} - D) = 0$, поскольку по условию $\deg(\mathcal{K} - D) = 2g - 2 - \deg D < 0$.

Теперь для доказательства леммы выберем отличную от $P_1, \ldots, P_k$ точку $P_0$ и рассмотрим точную тройку пучков

$$0 \to \mathcal{O}(mP_0 - \sum_{j=1}^{k} P_j) \to \mathcal{O}(mP_0) \to \bigoplus_{j=1}^{k} \mathbb{C}_{P_j} \to 0,$$

где последнее отображение есть взятие значений в точках $P_j$. Если $m > 2g - 2 + k$, то по теореме об обращении в нуль $H^1(S, \mathcal{O}(mP_0 - \sum_{j=1}^k P_j)) = 0$, и из точной когомологической последовательности этой тройки следует сюръективность отображения $H^0(S, \mathcal{O}(mP)) \to \mathbb{C}^m$, что и требовалось доказать.

**Следствие.** *Поле мероморфных функций на любой компактной римановой поверхности является конечным алгебраическим расширением поля рациональных функций от одной переменной $\mathbb{C}(t) = \mathcal{M}(\mathbb{C}P^1)$, т.е. полем степени трансцендентности 1.*

**Следствие.** *Если $f : S \to \mathbb{C}P^N$ — голоморфное отображение компатной римановой поверхности в проективное пространство, то его образ задается алгебраическими уравнениями.*

Действительно, если $f$ не постоянно, рассмотрим непостоянную композицию $f$ с проекцией на какую-нибудь прямую. Тогда любая мероморфная функция на $S$ и, в частности, любая аффинная координатная функция, будет связана с координатой вдоль этой прямой полиномиальным соотношением.

Заметим еще, что степень получающейся системы уравнений равна числу (с учетом кратности) точек пересечения $f(S)$ с любой гиперплоскостью, не содержащей $f(S)$ (слоем использованной проекции).

**3.** Голоморфное отображение $f : S \to M$ называется *погружением,* если его дифференциал нигде не обращается в нуль, и *вложением,* если оно к тому же инъективно. Наш основной результат, называемый еще теоремой существования Римана, состоит в следующем.

**Теорема.** *Любая компактная риманова поверхность может быть вложена в $\mathbb{C}P^N$ в качестве алгебраической кривой.*

Нам остается доказать только существование вложения, поскольку алгебраичность образа уже установлена.

Рассмотрим на $S$ линейное расслоение $\mathcal{L}$. Пусть $s_0, \ldots, s_N$ — некоторый базис в $H^0(S, \mathcal{L})$. Если для любой точки $S$ найдется сечение $\mathcal{L}$, не равное в этой точке нулю, то корректно определено отображение

$$S \ni P \to \iota_{\mathcal{L}}(P) := [s_0(P) : \cdots : s_N(P)] \in \mathbb{C}P^N.$$

В таком случае говорят еще, что линейная система, образованная дивизорами голоморфных сечений $\mathcal{L}$, не имеет базисных точек. Удобно записать это в терминах размерностей пространств сечений: нужно, чтобы для любой точки $P \in S$ выполнялось равенство

$$\dim_{\mathbb{C}} H^0(S, \mathcal{L}) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(S, \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(-P)) + 1.$$

Действительно, сечения, равные нулю в точке $P$, образуют подпространство коразмерности не больше 1. Если это подпространство собственное, то коразмерность в точности равна 1, что мы и написали.

**Пример.** Возьмем $\mathcal{L} = \Omega^1$. Если $P$ — базисная точка соответствующей линейной системы, то $\ell(\mathcal{K} - P) = \ell(\mathcal{K}) = g$ и по формуле Римана–Роха $\ell(P) = \ell(\mathcal{K} - P) + 1 - g + 1 = 2$, т.е. найдется функция, имеющая только полюс первого порядка в точке $P$. Это значит, что $S \cong \mathbb{C}P^1$. Итак, для любой римановой поверхности рода $g \geq 1$ корректно определено *каноническое отображение* $\iota_{\mathcal{K}} : S \to \mathbb{C}P^{g-1}$.

Отображение $\iota_{\mathcal{L}}$ будет погружением, если для любой точки $P \in S$ найдется сечение $\mathcal{L}$, имеющее в этой точке нуль ровно первого порядка.

Далее, это отображение будет инъективным, если для любых различных точек $P, Q \in S$ найдется сечение $\mathcal{L}$, равное нулю только в одной из них.

Эти два условия можно объединить, потребовав, чтобы для любых (не обязательно различных) точек $P, Q \in S$ было выполнено соотношение

$$\dim_{\mathbb{C}} H^0(S, \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(-Q)) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(S, \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(-P - Q)) + 1.$$

**Лемма.** *Предположим, что* $\deg \mathcal{L} > 2g$, *тогда отображение* $\iota_{\mathcal{L}}$ *является вложением.*

Для доказательства рассмотрим для некоторого линейного расслоения $\mathcal{E}$ и точки $P \in S$ точную тройку

$$0 \to \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(-P) \to \mathcal{E} \to \mathbb{C}_P \to 0$$

По теореме об обращении в нуль, если $\deg \mathcal{E} > 2g - 1$, то $H^1(S, \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(-P)) = 0$, и из т.к.п. для этой тройки сразу следует, что

$$\dim_{\mathbb{C}} H^0(S, \mathcal{E}) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(S, \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(-P)) + 1.$$

Применяя это утверждение к данному расслоению $\mathcal{L}$, получаем корректность определения $\iota_{\mathcal{L}}$, а применяя его к $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(-Q)$, получаем, что это отображение является вложением.

Тем самым, доказательство леммы и теоремы о проективном вложении закончено.

**Замечание.** Пересечение $\iota_{\mathcal{L}}(S)$ с гиперплоскостью $\sum a_j z_j = 0$ по определению есть дивизор голоморфного сечения $s = \sum a_j s_j$ расслоения $\mathcal{L}$. Следовательно, степень алгебраической кривой $\iota_{\mathcal{L}}(S)$ равна $\deg \mathcal{L}$. В частности, для любой римановой поверхности рода $g$ мы заведомо можем выбрать проективное вложение вида $\iota_{\mathcal{L}}$ в качестве кривой степени $2g + 1$ в проективном пространстве размерности $\dim_C H^0(S, \mathcal{L}) - 1 = (2g + 1 - g + 1) - 1 = g + 1$ (мы использовали формулу Римана–Роха и тот факт, что по теореме об обращении в нуль $H^1(S, \mathcal{L}) = 0$).

**Замечание.** Можно для построения отображения в проективное пространство взять только базис некоторого линейного подпространства в $H^0(S, \mathcal{L})$, разумеется, если в любой точке отлично от нуля некоторое сечение из этого подпространства. Геометрически это соответствует проектированию на соответствующее подпространство в $\mathbb{C}P^N$. На самом деле, именно такой вид имеет любое отображение $S$ в проективное пространство.

**Задача.** Доказать, что любую компактную риманову поверхность можно вложить в $\mathbb{C}P^3$ и погрузить в $\mathbb{C}P^2$.

Не любую риманову поверхность можно вложить в $\mathbb{C}P^2$. Например, имеет место следующая

**Теорема.** (Формула для рода плоской кривой.) *Пусть* $S \hookrightarrow \mathbb{C}P^2$ *— кривая степени* $d$, *тогда*

$$g(S) = \tfrac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

Приведем набросок доказательства. Рассмотрим проекцию $\pi : S \to \mathbb{C}P^1$ на прямую. Выберем аффинные координаты $(z, w)$ в $\mathbb{C}P^2$ так, что эта прямая есть ось $z$, а бесконечно удаленная прямая пересекает $S$ ровно в $d$ точках. Если $S$ задается уравнением $F(z, w) = 0$, то точки ветвления $\pi$ задаются условием $\frac{\partial F}{\partial w} = 0$, т.е. тем, что в этих точках касательная к $S$ вертикальна. Число таких точек на $S$ с учетом кратности равно $d(d-1)$. Применяя формулу Римана–Гурвица, получаем $2g(S) - 2 = -2d + d(d-1)$, т.е. $g(S) = \frac{1}{2}(d^2 - 3d + 2)$, что и требовалось.

В частности, никакую риманову поверхность рода 2 нельзя вложить в $\mathbb{C}P^2$. Не следует, впрочем, думать, что такое вложение существует для любой римановой поверхности подходящего рода.