Лекция 9: Эндоморфизмы и автоморфизмы римановых поверхностей.

1. Назовем голоморфное отображение римановой поверхности в себя *эндоморфизмом* и обозначим через $\mathrm{End}(S)$ множество всех эндоморфизмов S. Эндоморфизм называется *автоморфизмом*, если он обратим, т.е. является взаимнооднозначным отображением. Автоморфизмы римановой поверхности S образуют группу $\mathrm{Aut}(S)$.

В простейшем случае рода нуль $S = \mathbb{C}P^1$, и мы имеем элементарный результат.

Теорема. $\mathrm{End}(\mathbb{C}P^1) = \mathbb{C}(t)$ *и* $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}P^1) = PGL(1, \mathbb{C})$.

Отметим, кстати, что этот результат справедлив для проективного пространства $\mathbb{C}P^n$ любой размерности.

2. Перейдем теперь к случаю $g(S) = 1$, когда $S = \mathbb{C}/\Lambda$ есть некоторый тор. Заметим, что на S имеется очевидная группа автоморфизмов, а именно, группа сдвигов, поэтому мы будем рассматривать автоморфизмы и эндоморфизмы, сохраняющие точку $0 \in \mathbb{C}/\Lambda$.

Предположим, что $\Lambda = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$, где $\tau \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}\,\tau > 0$. Очевидно, что любой эндоморфизм S, сохраняющий 0, соответствует отображению $z \to az$, $a \in \mathbb{C}$, переводящему решетку Λ в себя. Множество $\mathrm{End}_0(S)$ таких эндоморфизмов образует кольцо: умножение задается композицией, а сложение — поточечным сложением. Сопоставление эндоморфизму числа a задает вложение этого кольца в $\mathbb{C}$.

Заметим сначала, что заведомо $\mathbb{Z} \subset \mathrm{End}_0(S)$, в том числе имеем два автоморфизма — умножения на ± 1. Если это включение является строгим, то говорят, что S *имеет комплексное умножение.*

Предположим теперь, что умножение на $a \in \mathbb{C}$ сохраняет Λ, тогда

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a\tau & = & n\tau + m \\ a & = & k\tau + l \end{array} \right. \qquad (*)$$

Следовательно, число a удовлетворяет характеристическому уравнению

$$a^2 - (n + l)a + nl - mk = 0.$$

Итак, a является квадратичной иррациональностью и целым алгебраическим числом. Таким образом, если S имеет комплексное умножение, то поле $\mathbb{Q}(\tau)$ будет мнимым квадратичным расширением поля $\mathbb{Q}$, и кольцо $\mathrm{End}_0(S)$ будет некоторым подкольцом кольца целых этого поля. Обратно, в этом случае легко найти число $a \notin \mathbb{Z}$, удовлетворяющее условиям $(*)$.

Предположим теперь, что умножение на $a \notin \mathbb{R}$ соответствует автоморфизму S. Тогда a^{-1} также является целым алгебраическим числом, следовательно, $nl - mk = \pm 1$. Обозначая теперь $\alpha = n + l$, мы находим

$$a = \frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} \mp 1} \quad \notin \mathbb{R}.$$

Таким образом, $\alpha = 0, \pm 1$, что соответствует $\mathbb{Q}(\tau) = \mathbb{Q}(i)$ и $\mathbb{Q}(\tau) = \mathbb{Q}(e^{\pi i/3})$. В первом случае группа $\mathrm{Aut}_0(S)$ порождена умножением на i, а во втором случае — умножением на $e^{\pi i/3}$.

Подведем итог:

Теорема. *Пусть* $S = \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ *— риманова поверхность рода* 1. *Тогда кольцо эндоморфизмов* $\mathrm{End}_0(S)$ *изоморфно* $\mathbb{Z}$, *за исключением случая* $\mathbb{Q}(\tau) = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, $d \in \mathbb{N}$. *Группа автоморфизмов* $\mathrm{Aut}_0(S)$ *изоморфна* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\pm 1\}$, *кроме следующих двух случаев*: $\mathbb{Q}(\tau) = \mathbb{Q}(i)$, $\mathrm{Aut}_0(S) = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, *и* $\mathbb{Q}(\tau) = \mathbb{Q}(e^{\pi i/3})$, $\mathrm{Aut}_0(S) = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. *Полная группа автоморфизмов* $\mathrm{Aut}(S)$ *является расширением* $\mathbb{C}/\Lambda$ *с помощью конечной группы* $\mathrm{Aut}_0(S)$.

3. Для римановых поверхностей рода большего 1 мы докажем достаточно общий результат, из которого, в частности, будет следовать теорема Клейна о конечности группы автоморфизмов такой поверхности.

Теорема. *Пусть S — компактная риманова поверхность рода $g(S) \geq 2$, тогда для любой компактной римановой поверхности S' существует не более чем конечное число непостоянных голоморфных отображений из S' в S.*

Если существует непостоянное отображение $f : S' \to S$, то $g(S') \geq g(S)$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда f — изоморфизм.

Замечание. Утверждение о конечности в этой теореме называется *леммой де Франчиса.*

Рассмотрим сначала непостоянное отображение $f : S' \to S$ и применим формулу Римана–Гурвица:

$$2g(S') - 2 = \deg f \cdot (2g(S) - 2) + \sum_{x \in S'} \mathrm{ind}_x f.$$

Поскольку $2g(S) - 2 > 0$, отсюда следует, что

$$1 \leq \deg f \leq \frac{2g(S') - 2}{2g(S) - 2}$$

Из этого неравенства немедленно вытекает вторая часть теоремы. Мы получаем, кроме того, что степень любого непостоянного отображения $f : S' \to S$ не превосходит некоторой константы, зависящей только от рода S и S'.

Для доказательства леммы де Франчиса покажем сперва, что справедлива такая

Лемма. *Пусть $f, h : S' \to S$ — непостоянные голоморфные отображения компактных римановых поверхностей и $f^* = h^* : H^1(S, \mathbb{C}) \to H^1(S', \mathbb{C})$. Если $g(S) \geq 2$, то $f = h$.*

Отображения f^* и h^* сохраняют разложение Ходжа $H^1(\cdot, \mathbb{C}) = \Omega^1(\cdot) \oplus \overline{\Omega^1(\cdot)}$, значит, для любых точек $P, Q \in S'$ и любой голоморфной формы $\omega \in \Omega^1(S)$ получаем

$$\int_{f(P)}^{f(Q)} \omega = \int_P^Q f^*\omega = \int_P^Q h^*\omega = \int_{h(P)}^{h(Q)} \omega.$$

Таким образом, по теореме Абеля для любых точек $P, Q \in S$ дивизор $f(P) - f(Q) - h(P) + h(Q)$ линейно эквивалентен нулю. Иначе говоря, существует дивизор D степени нуль на S такой, что $h(P) - f(P) \sim D$ для любой точки $P \in S'$.

Напомним, что если на римановой поверхности, отличной от $\mathbb{C}P^1$, имеется линейная эквивалентность $P \sim Q$, то точки P и Q совпадают. Непостоянное голоморфное отображение f сюръективно, и мы видим, что лемма вытекает из следующего утверждения:

Если дивизор D степени нуль на римановой поверхности S рода $g \geq 2$ обладает тем свойством, что для любой точки $P \in S$ найдется такая точка $Q \in S$, что $D + P \sim Q$, то $D \sim 0$.

Предположим противное: пусть $D \not\sim 0$, тогда $\ell(D) = 0$. По формуле Римана–Роха получаем, что $\ell(\mathcal{K} - D) = g - 1 > 0$.

С другой стороны по условию для любой точки P справедливо $\ell(D + P) = 1$, и снова по формуле Римана–Роха $\ell(\mathcal{K} - D - P) = g - 1$.

Итак, у расслоения $\mathcal{O}(\mathcal{K} - D)$ имеются ненулевые голоморфные сечения, и все они обращаются в нуль во всех точках $P \in S$. Полученное противоречие доказывает наше утверждение и, следовательно, лемму.

Замечание. Пусть на римановой поверхности фиксирована точка $P_0 \in S$. Рассмотрим *отображение Абеля* $J_{P_0}(P) := \int_{P_0}^P \bmod \Gamma \in \mathrm{Jac}(S)$, инъективно отображающее риманову поверхность рода $g \geq 1$ в ее якобиан. Доказанное утверждение о дивизорах степени нуль можно сформулировать так: если $g \geq 2$, то $J_{P_0}(S)$ не содержит своих нетривиальных сдвигов в якобиане.

Вернемся теперь к доказательству теоремы. С помощью разложения Ходжа введем для любой компактной римановой поверхности Σ на пространстве $H^1(\Sigma, \mathbb{C})$ эрмитово скалярное произведение, полагая

$$\begin{aligned}
(\omega_1, \omega_2) &= i \textstyle\int_S \omega_1 \wedge \overline{\omega_2}, && \omega_1, \omega_2 \in \Omega^1(\Sigma), \\
(\omega_1, \omega_2) &= (\overline{\omega_1}, \overline{\omega_2}), && \omega_1, \omega_2 \in \overline{\Omega^1(\Sigma)}, \\
(\omega_1, \omega_2) &= 0, && \omega_1 \in \Omega^1(\Sigma), \omega_2 \in \overline{\Omega^1(\Sigma)}.
\end{aligned}$$

Заметим теперь, что линейные отображения $f^*: H^1(S,\mathbb{C}) \to H^1(S',\mathbb{C})$ для непостоянных голоморфных отображений $f: S' \to S$ имеют ограниченные в совокупности нормы. Действительно, для $\omega \in \Omega^1(S)$ имеем

$$(f^*\omega, f^*\omega) = i\int f^*\omega \wedge \overline{f^*\omega} = i\int f^*(\omega \wedge \overline{\omega}) = \deg f \cdot (\omega,\omega),$$

и утверждение об ограниченности норм следует из оценки степеней.

С другой стороны, в целочисленных базисах пространств когомологий матрица любого линейного отображения вида f^* будет целочисленной, следовательно, число таких отображений конечно. Согласно лемме конечным будет тогда и число непостоянных отображений $f: S' \to S$, что и требовалось доказать.

Следствие. *Если $g(S) \geq 2$, то группа $\mathrm{Aut}(S)$ конечна и состоит из всех непостоянных эндоморфизмов S.*

С помощью формулы Римана–Гурвица можно весьма точно оценить порядок группы $\mathrm{Aut}(S)$.

Теорема. (Оценка Гурвица.) $\#\,\mathrm{Aut}(S) \leq 84(g(S)-1)$

Наметим доказательство. Пусть G — любая конечная группа автоморфизмов S, например, вся группа $\mathrm{Aut}(S)$. Для любой точки $a \in S$, пусть $G_a = \{f \in G \mid f(a) = a\}$ — ее группа изотропии и $m_a = \#G_a$.

Нетрудно видеть, что факторпространство S/G можно наделить структурой римановой поверхности такой, что каноническое отображение $\pi: S \to S/G$ голоморфно, и $\mathrm{ord}_a\,\pi = m_a$ в любой точке $a \in S$.

Прообраз любой точки $\pi(a) \in S/G$ состоит из $\frac{\#G}{m_a}$ точек, в каждой из которых $\mathrm{ind}_x\,\pi = m_a - 1$. Следовательно, формула Римана–Гурвица для π имеет вид

$$2g(S) - 2 = \#G \cdot (2g(S/G) - 2) + \sum_{j=1}^{k} \frac{\#G}{m_j}(m_j - 1),$$

где k — число точек, над которыми разветвлено π.

Если $g(S/G) \geq 2$, то сразу $\#G \leq \frac{2g(S)-2}{2g(S/G)-2} \leq g(S) - 1$.

Если $g(S/G) = 1$, то хотя бы одно из m_j отлично от единицы, значит, $\sum_{j=1}^{k}(1 - \frac{1}{m_j}) \geq \frac{1}{2}$, и получается оценка $\#G \leq 4(g(S)-1)$.

Наконец, если $g(S/G) = 0$, то мы получаем соотношение

$$0 < \frac{2g(S)-2}{\#G} = -2 + \sum_{j=1}^{k}(1 - \frac{1}{m_j}).$$

Легко проверить, что наименьшее положительное значение правой части равно $\frac{1}{42}$ (и достигается при $k = 3$, $m_1 = 2$, $m_2 = 3$ и $m_3 = 7$), что и дает требуемую оценку $\#G \leq 84(g(S)-1)$.

Задача. Существует риманова поверхность любого наперед заданного рода, имеющая нетривиальный автоморфизм порядка 2 (т.е. такой, что $f^2 = \mathrm{Id}$).

Задача. Любая риманова поверхность рода 2 допускает нетривиальный автоморфизм.

Замечание. Можно показать, что группа автоморфизмов любого *компактного* комплексного многообразия является комплексной группой Ли, а ее алгебра Ли изоморфна пространству голоморфных векторных полей на этом многообразии. В случае римановой поверхности S рода g размерность этого пространства есть

$$H^0(S, \mathcal{T}S) = H^0(S, (\Omega^1)^*) = \ell(-\mathcal{K}) = \begin{cases} 3, & g = 0, \\ 1, & g = 1, \\ 0, & g \geq 2, \end{cases}$$

что совпадает с полученными нами непосредственно значениями.