Топология 4-мерных многообразий. Лекция 1

П.Е. Пушкарь, А.С. Шмелёв

February 25, 1998

- Содержание курса.
- Характеристические классы Штифеля-Уитни как препятствия. Класс Эйлера.
- Спинорные структуры на векторных расслоениях и спинорные многообразия.

Основная проблема топологии многообразий состоит в характеризации многообразий при помощи алгебраических инвариантов (гомотопические группы, группы гомологий и т.п.). Вначале оговорим, в каком классе многообразий будем работать. Следующие три категории имеют наибольшее употребление в топологии многообразий:

TOP: категория топологических многообразий и гомеоморфизмов;

PL: категория кусочно-линейных многообразий и кусочно-линейных гомеоморфизмов (т.е. многообразий разбитых на симплексы и гомеоморфизмов сохраняющих некоторые подразделения этих триангуляций);

DIFF: категория гладких многообразий и диффеоморфизмов.

Например, в размерностях 1 и 2 топологическое многообразие имеет единственную **PL**-структуру и единственную **DIFF**-структуру, а фундаментальная группа однозначно определяет тип диффеоморфизма замкнутого связного многообразия. В размерности 3 Мойс доказал, что любое топологическое 3-мерное многообразие обладает единственной **PL**-структурой и единственной гладкой структурой, т.е. классификации в этих трех категориях совпадают. Однако, при переходе к размерности 3 трудности неизмеримо возрастают. Неизвестно, например, существует ли замкнутое односвязное трехмерное многообразие не гомеоморфное сфере (гипотеза Пуанкаре утверждает, что если $\pi_1\left(M^3\right)=0$, то M^3 гомеоморфно S^3).

Из теоремы Гуревича и двойственности Пуанкаре легко доказать, что если $\pi_1\left(M^3\right)=0$, то $M^3 \sim S^3$ (гомотопически эквивалентно). Поэтому гипотезу Пуанкаре часто формулируют в виде: если $M^3 \sim S^3$, то $M^3 \approx S^3$ (гомеоморфно). В таком виде гипотеза Пуанкаре имеет смысл в произвольной размерности. В размерностях 1 и 2 справедливость гипотезы вытекает из классификации 1-мерных и 2-мерных многообразий, а в размерностях $n \geq 5$ из теоремы Смейла об h-кобордизме. В размерности 3 вопрос остается открытым. В начале 80-х годов М. Фридман доказал справедливость гипотезы Пуанкаре в размерности 4. На самом деле Фридман доказал теорему об h-кобордизме для топологических многообразий размерности 4 и получил полную классификацию односвязных замкнутых 4-мерных многообразий в категории **TOP**. Следует отметить, что в размерности 4 Кернсом было доказано, что любое **PL**-многообразие имеет единственную **DIFF**-структуру, однако, существуют примеры 4-мерных топологических многообразий не допускающих сглаживания (позже такое многообразие будет построено). Таким образом, в размерности 4 **DIFF** и **TOP**-классификации многообразий различны. Дональдсон, используя методы математической физики, классифицировал гладкие 4-мерные односвязные замкнутые многообразия с положительно определенной формой пересечений. Удивительным следствием теоремы Дональдсона является существование экзотических гладких структур на $\mathbb{R}^4$.

Настоящий курс будет в основном посвящен изложению результатов Фридмана о классификации односвязных топологических замкнутых 4-мерных многообразий. Мы начнем курс с рассмотрения некоторых вопросов алгебраической топологии, а так же фундаментальных теорем о 4-мерных многообразиях, которые необходимо привлекать к решению данной классификационной проблемы.

Начнём с рассмотрения характеристических классов Штифеля-Уитни. Конструкция характеристических классов векторных расслоений состоит в следующем. Пусть ξ - векторное расслоение $p : E \to B$ над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Задание характеристического класса u с коэффициентами в коммутативном кольце R с единицей (как правило $R = \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ или $\mathbb{R}$) означает задание для каждого векторного расслоения ξ класса когомологий $u(\xi) \in H^*(B; R)$. При этом должны выполняться следующие условия.

1. Если η - векторное расслоение над базой B изоморфное ξ, то $u(\eta) = u(\xi)$.

2. Если $f : B_1 \to B$ и $\eta = f^*\xi$ - векторное расслоение над B_1 индуцированное из расслоения ξ отображением f, то $u(f^*\xi) = f^*u(\xi) \in H^*(B_1, R)$ (функториальность).

Характеристические классы изоморфных векторных расслоений над одной и той же базой совпадают. Обратное неверно. Тем не менее характеристические классы дают существенную информацию о классе изоморфизма расслоения.

Характеристические классы (т.е. отображения классов векторных расслоений в когомологии их баз, образуют R-алгебру относительно операций сложения, $\smile$-произведения и умножения на элементы кольца R. Для вычисления структуры этой алгебры достаточно знать систему ее образующих. Наиболее часто встречаются следующие случаи:

1. расслоения вещественные и $R = \mathbb{Z}_2$ - классы Штифеля-Уитни;

2. расслоения комплексные и $R = \mathbb{Z}$ - классы Чженя;

3. расслоения вещественные и $R = \mathbb{Z}$ - классы Понтрягина;

4. расслоения вещественные ориентированные и $R = \mathbb{Z}$ - классы Понтрягина и класс Эйлера.

Мы рассмотрим только первый случай.

Пусть ξ - вещественное n-мерное векторное расслоение $p : E \to B$. Фиксируем некоторую евклидову метрику на слоях расслоения ξ и рассмотрим ассоциированное расслоение Штифеля $V_k(\xi)$, состоящее из пар $(x, \{v_1, \ldots, v_k\})$, где $x \in B$, а $\{v_1, \ldots, v_k\}$ - ортонормированный k-репер в слое F_x расслоения ξ над точкой x. Будем считать, что база B расслоения ξ является клеточным пространством.

Лемма 1. *Пусть $V_{n,k}$ -многообразие Штифеля (многообразие ортонормированных k-реперов в $\mathbb{R}^n$. Тогда: $\pi_i(V_{n,k}) = 0$, если $i \le n-k-1$; $\pi_{n-k}(V_{n,k}) = \mathbb{Z}_2$, если $n-k$ - нечетно и $k > 1$; $\pi_{n-k}(V_{n,k}) = \mathbb{Z}$, если $n-k$ - четно или $k = 1$. (группа $\pi_0(X)$ определяется как группа приведенных гомологий $\tilde{H}_0(X;\mathbb{Z})$.)*

Доказательство. Из точной гомотопической последовательности расслоения $V_{n,k} \to S^{n-1}$ со слоем $V_{n-1,k-1}$ (реперу сопоставляется его первый вектор)

$$\cdots \to \pi_{i+1}\left(S^{n-1}\right) \to \pi_i\left(V_{n-1,k-1}\right) \to \pi_i\left(V_{n,k}\right) \to \pi_i\left(S^{n-1}\right) \to \cdots$$

следует, что $\pi_i(V_{n,k}) = \pi_i(V_{n-1,k-1})$, при $i < n-2$. Далее по индукции получаем равенства

$$\begin{aligned}
\pi_i\left(V_{n,k}\right) &= \pi_i\left(V_{n-1,k-1}\right), \quad \text{при} \quad i < n-2;\\
&= \pi_i\left(V_{n-2,k-2}\right), \quad \text{при} \quad i < n-3;\\
&= \pi_i\left(V_{n-3,k-3}\right), \quad \text{при} \quad i < n-4;\\
&= \cdots = \pi_i\left(V_{n-k+2,2}\right), \quad \text{при} \quad i < n-k+1;\\
&= \pi_i\left(V_{n-k+1,1}\right), \quad \text{при} \quad i < n-k;\\
&= \pi_i\left(S^{n-k}\right) = 0, \quad \text{при} \quad i < n-k.
\end{aligned}$$

Это доказывает первое утверждение леммы. При $i = n-k$ и $k = 1$ имеем $\pi_{n-1}(V_{n,1}) = \pi_{n-1}\left(S^{n-1}\right) = \mathbb{Z}$. При $i = n-k$ и $k > 1$ получаем изоморфизм $\pi_{n-k}(V_{n,k}) = \pi_{n-k}(V_{n-k+2,2})$. Таким образом, для завершения доказательства леммы достаточно вычислить $\pi_m(V_{m+2,2})$, где $V_{m+2,2} = ST_*S^{m+1}$ - многообразие единичных касательных векторов к сфере S^{m+1}.

Рассмотрим точную гомотопическую последовательность расслоения $p : ST_*S^{m+1} \to S^{m+1}$

$$\cdots \to \underbrace{\pi_{m+1}\left(S^{m+1}\right)}_{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\partial} \underbrace{\pi_m\left(S^m\right)}_{\mathbb{Z}} \to \pi_m\left(ST_*S^{m+1}\right) \to \underbrace{\pi_m\left(S^{m+1}\right)}_{0} \to \cdots.$$

Из нее следует, что $\pi_m\left(ST_*S^{m+1}\right) = \pi_m\left(S^m\right)/\mathrm{Im}\partial$. Граничный оператор ∂ есть умножение на эйлерову характеристику $\chi\left(S^{m+1}\right)$. Следовательно ∂

есть умножение на 2 при нечетных m и нулевое отображение при четных m. Это завершает доказательство леммы. ▶

Из леммы 1 следует существование сечения s расслоения $V_k(\xi)$ над остовом B^{n-k} базы B (здесь используется $(n-k-1)$-связность слоя $V_{n,k}$). Для продолжения сечения на B^{n-k+1} существует препятствие. Для того, чтобы сечение s продолжалось на $(n-k+1)$-клетку e^{n-k+1} необходимо и достаточно, чтобы у индуцированного расслоения $\varphi_e^* V_k(\xi)$ над диском D^{n-k+1} (здесь $\varphi_e : D^{n-k+1} \to B$ - характеристическое отображение клетки e^{n-k+1}), у которого уже задано сечение s_e над сферой $S^{n-k} = \partial D^{n-k+1}$, это сечение продолжалось на весь диск D^{n-k+1}. Так как расслоение $\varphi_e^* V_k(\xi)$ тривиально, то такое продолжение существует тогда и только тогда, когда сечение $s_e : S^{n-k} \to V_{n,k}$ определяет нулевой гомотопический класс в $\pi_{n-k}(V_{n,k})$. Таким образом, определена препятствующая коцепь $\alpha_{n-k+1} \in C^{n-k+1}(B; \{\pi_{n-k}(V_k(\xi))\})$ с коэффициентами в пучке $\{\pi_{n-k}(V_k(\xi))\}$. Эта препятствующая коцепь строится по сечению s на B^{n-k} и является коциклом, т.к.

$$d\alpha_{n-k+1}\left(e^{n-k+2}\right) = \sum_{e_l^{n-k+1}} \left[e^{n-k+2} : e_l^{n-k+1}\right] \left[s_{e_l^{n-k+1}}\right] = 0$$

(коцепь α_{n-k+1} определяется при помощи границ клеток, на которых заданы сечения). Таким образом, для существования продолжения сечения s с остова B^{n-k} на остов B^{n-k+1} необходимо и достаточно, чтобы коцикл $\alpha_{n-k+1} = 0$.

Лемма 2. *Сечение s тогда и только тогда можно продолжить на B^{n-k+1} предварительно изменив его на B^{n-k}, не меняя на B^{n-k-1}, когда коцикл α_{n-k+1}^s, построенный по сечению s, когомологичен нулю.*

Доказательство. Пусть $\alpha^s = \alpha_{n-k+1}^s = d\beta$ для некоторой коцепи $\beta \in C^{n-k}(B; \{\pi_{n-k}(V_k(\xi))\})$. Покажем, что существует сечение $\tilde{s}$ на B^{n-k}, совпадающее с s на B^{n-k-1} и такое, что $\alpha^{\tilde{s}} = \alpha^s - d\beta = 0$. Для построения $\tilde{s}$ изменим s на $(n-k)$-мерных клетках. Выделим в произвольной $(n-k)$-мерной клетке e маленький шарик около ее центра. Изменим сечение s на этом шарике так, чтобы старое и новое сечение $\tilde{s}$, рассматриваемые над шариком как отображения, соответственно, верхнего и нижнего полушария $(n-k)$-мерной сферы, давали гомотопический класс $-\beta(e) \in \pi_{n-k}(V_{n,k})$. Производя такое изменение на каждой $(n-k)$-мерной клетке получаем искомое сечение $\tilde{s}$. При этом новое сечение совпадает со старым на остове B^{n-k-1}.

Обратно, если существует сечение $\tilde{s}$ над B^{n-k} с нулевым препятствующим коциклом $\alpha_{n-k+1}^{\tilde{s}} = 0$ и совпадающее с s над B^{n-k-1}, то существует коцепь $\beta \in C^{n-k}(B; \{\pi_{n-k}(V_k(\xi))\})$ такая, что $\alpha^s = d\beta$. Действительно, пусть e - произвольная $(n-k)$-клетка. Пусть $\beta(e) \in \pi_{n-k}(V_{n,k})$ - гомотопический класс отображения сферы, совпадающего с s на верхнем полушарии и с $\tilde{s}$ на нижнем полушарии. Это дает искомую коцепь β. ▶

Лемма 3. *Пусть s - сечение расслоения $V_k(\xi)$ над B^{n-k} и α^s - препятствующий коцикл к продолжению сечения s на B^{n-k+1}. Когомологический* *класс* $[\alpha^s] \in H^{n-k+1}(B; \{\pi_{n-k}(V_k(\xi))\})$ *не зависит от выбора сечения* s.

Доказательство. Пусть $\tilde{s}$ - другое сечение над B^{n-k} и $\alpha^{\tilde{s}}$ - его препятствующий коцикл. Построим коцепь $\beta \in C^{n-k}(B; \{\pi_{n-k}(V_k(\xi))\})$ такую, что $\alpha^s - \alpha^{\tilde{s}} = d\beta$. Для каждой $(n-k)$-клетки e рассмотрим гомотопический класс $\beta(e) \in \pi_{n-k}(V_{n,k})$ отображения сферы, совпадающего с s на верхнем полушарии и с $\tilde{s}$ на нижнем полушарии. β - искомая коцепь. ▶

Определение. Построенный когомологический класс

$$\alpha_{n-k+1} \in H^{n-k+1}(B; \{\pi_{n-k}(V_k(\xi))\})$$

называется препятствующим характеристическим классом расслоения k-реперов $V_k(\xi)$.

Тривиальность препятствующего класса равносильна возможности продолжения сечения с остова B^{n-k} на остов B^{n-k+1} с предварительным изменением его на некоторых $(n-k)$-клетках.

Если $n-k$ - нечетно и $k > 1$, то по лемме 1 $\pi_{n-k}(V_{n,k}) = \mathbb{Z}_2$, причем изоморфизм здесь канонический. Следовательно, в этом случае препятствующий класс лежит в группе $H^{n-k+1}(B; \mathbb{Z}_2)$. Если же $n-k$ - четно или $k = 1$, то по лемме 1 $\pi_{n-k}(V_{n,k}) = \mathbb{Z}$. Последний изоморфизм, вообще говоря, не является каноническим и система локальных коэффициентов в этом случае является скрученной. Однако и в этом случае существует канонический гомоморфизм группы $\pi_{n-k}(V_{n,k})$ в $\mathbb{Z}_2$, поэтому, приводя систему коэффициентов по модулю 2, получаем корректно определенный когомологический класс в группе $H^{n-k+1}(B; \mathbb{Z}_2)$.

Определение. Характеристическим классом Штифеля-Уитни $w_i(\xi) \in H^i(B; \mathbb{Z}_2)$, $i = 1, \ldots, n$ расслоения ξ, где n - размерность расслоения ξ, называется редукция по модулю 2 препятствующего характеристического класса $\alpha_i \in H^i(B; \{\pi_{i-1}(V_{n-i+1}(\xi))\})$. Полным классом Штифеля-Уитни расслоения ξ называется сумма

$$1 + w_1(\xi) + \ldots + w_n(\xi) \in H^*(B; \mathbb{Z}_2).$$

Классы Штифеля-Уитни удовлетворяют следующему свойству (теорема Уитни о произведении, см. Дж. Милнор, Дж. Сташеф. Характеристические классы.)

$$w_i(\xi \oplus \eta) = \sum_{j=0}^{i} w_j(\xi) \smile w_{i-j}(\eta).$$

Пример 1. Если ξ - тривиальное векторное расслоение, то все его характеристические классы равны нулю, т.к. $\forall k$ расслоение k-реперов $V_k(\xi)$ тривиально и не имеет препятствий для продолжения сечений.

Пример 2. Пусть γ^1 - расслоение листа Мебиуса над S^1. Покажем, что класс $w_1(\gamma^1) \in H^1(S^1; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ нетривиален. Выберем для окружности следующее клеточное разбиение: две 0-мерные клетки e_1^0, e_2^0 и две 1-мерные клетки e_1^1 и e_2^1. Тогда расслоение $V_1(\gamma^1)$ есть двулистное накрытие окружности окружностью и, следовательно, $\alpha_1(e_1^1) = 0 \in \pi_0(\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}$, а $\alpha_1\left(e_2^1\right) = 1 \in \pi_0\left(\mathbb{Z}_2\right) = \mathbb{Z}$ есть гомотопический класс отображения переводящего одну точку в 0, а другую - в 1 в $\mathbb{Z}_2$. Приведение по модулю 2 дает нетривиальный когомологический класс в $H^1\left(S^1; \mathbb{Z}_2\right)$.

Пример 3. Если n-мерное расслоение ξ обладает k всюду линейно независимыми сечениями, то

$$w_n(\xi) = \ldots = w_{n-k+1}(\xi) = 0.$$

Действительно, в этом случае расслоение k-реперов $V_k(\xi)$ имеет сечение. Следовательно, сечение s заданное на i-остове может быть продолжено на $i+1$-остов, где $i \geq n-k+1$. Таким образом все препятствующие классы α_i тривиальны при $i \geq n-k+1$.

Теорема 1. *Расслоение ξ ориентируемо тогда и только тогда, когда $w_1(\xi) = 0$.*

Доказательство. Расслоения ξ над 1-мерным клеточным пространством классифицируются первым классом Штифеля-Уитни $w_1(\xi)$, при этом расслоение ξ тривиально тогда и только тогда, когда $w_1(\xi) = 0$. Действительно, можно считать, что база B имеет только одну 0-мерную клетку, т.е. одномерный остов B^1 является букетом окружностей. Над окружностью имеем два класса изоморфизма n-мерных расслоений: тривиальное и нетривиальное. Нетривиальное расслоение ξ не ориентируемо и представляется в виде суммы $\gamma^1 \oplus \eta$, где η - тривиальное расслоение. Следовательно, по теореме Уитни о произведении расслоение ξ тривиально тогда и только тогда, когда $w_1(\xi) = 0$. Утверждение следует из того, что расслоение ξ над произвольной клеточной базой ориентируемо тогда и только тогда, когда его ограничение на одномерный остов тривиально, т.е., когда $w_1(\xi) = 0$. ▶

Фундаментальная группа $\pi_1(SO(n,\mathbb{R})) = Z_2$ при $n \geq 3$, а соответствующее 2-листное накрытие называется спинорной группой и обозначается $Spin(n)$.

Определение. Говорят, что ориентируемое расслоение ξ имеет спинорную структуру, если его структурная группа редуцируется к $Spin(n)$.

Другими словами, ориентируемое расслоение ξ имеет спинорную структуру, если существует такое открытое тривиализующее покрытие $\{U_\alpha\}$ базы B для которого отображения склейки $\varphi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to SO(n,\mathbb{R})$ поднимаются на односвязную накрывающую $Spin(n)$, т.е. существуют отображения $\psi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to Spin(n)$, что $\varphi_{\alpha\beta} = q \circ \psi_{\alpha\beta}$, где $q : Spin(n) \to SO(n,\mathbb{R})$ - накрытие.

Теорема 2. *На n-мерном ориентируемом расслоении ξ, $n \geq 3$ тогда и только тогда существует спинорная структура, когда второй класс Штифеля-Уитни $w_2(\xi) = 0$.*

Доказательство. Можно считать, что одномерный остов базы B^1 есть букет окружностей. Расслоение ξ над B^1 тривиально, т.к. ξ - ориентируемо. Выберем тривиализацию расслоения ξ над B^1 (сечение расслоения $V_n(\xi)$ над B^1). По определению классов Штифеля-Уитни эту тривиализацию тогда и только тогда можно продолжить на 2-мерный остов B^2, когда

$w_2(\xi) = 0$ (т.к. 2 - четно), следовательно, достаточно проверить, что расслоение ξ тогда и только тогда обладает спинорной структурой, когда его ограничение на 2-остов B^2 тривиально. Если это ограничение тривиально, то на нем спинорная структура существует. Покажем, что ее можно продолжить на остовы большей размерности. Пусть спинорная структура уже продолжена на ограничение расслоения ξ на B^i, $i \geq 2$ и пусть e^{i+1} - $(i+1)$-клетка. Продолжим спинорную структуру над этой клеткой. Выделим во внутренности клетки e^{i+1} два шарика U и $W \subset U$. Рассмотрим покрытие $\left\{B^i \cup \left(e^{i+1} \backslash W\right), U\right\}$ пространства $B^i \cup e^{i+1}$. Над обеими областями покрытия расслоение ξ, очевидно, имеет спинорную структуру. Пересечение областей гомотопически эквивалентно i-мерной сфере, $i \geq 2$. Следовательно, из точной гомотопической последовательности накрытия вытекает, что отображение склейки, принимающее по определению значения в группе $SO(n, \mathbb{R})$, может быть поднято до отображения со значениями в $Spin(n)$ и мы получаем спинорную структуру расслоения ξ над $B^i \cup e^{i+1}$. По индукции получаем спинорную структуру на всем расслоении ξ.

Обратно, если спинорная структура на расслоении ξ существует, то она существует и на ограничении расслоения ξ на B^2. Покажем, что тогда это ограничение тривиально. Если бы оно не было тривиальным, то нашлась бы такая 2-клетка e^2 и такие два шарика U и $W \subset U$ внутри нее, что отображение склейки покрытия $\left\{B^2 \backslash W, U\right\}$ задавало бы нетривиальный класс фундаментальной группы $\pi_1(SO(n, \mathbb{R}))$ и не поднималось бы до отображения в односвязную накрывающую $Spin(n)$, т.е. спинорной структуры не существовало бы. ▶

Определение. Многообразие M называется спинорным, если касательное расслоение τ_M обладает спинорной структурой.

По теореме 2 многообразие M тогда и только тогда является спинорным, когда его второй класс Штифеля-Уитни нулевой, $w_2(M) = w_2(\tau_M) = 0$.

Пусть ξ - n-мерное векторное расслоение над B. Расслоение ξ ориентируемо тогда и только тогда, когда пучёк локальных коэффициентов $\{\pi_{n-1}(V_1(\xi))\}$ имеет глобальное сечение, т.е. когда в группе $\pi_{n-1}(V_{n,1}) = \mathbb{Z}$ можно выбрать образующую непрерывно зависящую от слоя. Действительно, выбор ориентации в слое есть выбор одной из двух образующих в $\pi_{n-1}(V_{n,1})$. Таким образом, расслоение ξ ориентируемо тогда и только тогда, когда препятствие α_n к продолжению сечения расслоения $V_1(\xi)$ с остова B^{n-1} на B^n лежит в группе $H^n(B; \mathbb{Z})$.

Определение. Пусть ξ - ориентированное n-мерное расслоение. Класс $e(\xi) = \alpha_n \in H^n(B; \mathbb{Z})$ называется классом Эйлера расслоения ξ.

Задача. При смене ориентации класс Эйлера меняет знак. Если ξ - нечётномерное векторное расслоение, то $2e(\xi) = 0$.

Задача. Пусть M^n - ориентируемое замкнутое многообразие. Доказать, что $e(\tau_M)[M] = \chi(M)$, где τ_M - касательное расслоение, $[M]$ - фундаментальный гомологический класс, $\chi(M)$ - эйлерова характеристика многообразия M.

Задача. $e(\xi \oplus \eta) = e(\xi) \smile e(\eta)$.

Пусть ξ есть n-мерное ориентированное векторное расслоение над n-мерным компактным ориентированным многообразием и пусть s_0 - нулевое сечение. Тогда для сечения общего положения s определён индекс пересечения $\mathrm{ind} s = s_0 \circ s$.

Лемма 4. *Для любого сечения общего положения s выполнено* $\mathrm{ind} s = e(\xi)[M]$. *[В частности, индекс векторного поля на многообразии равен эйлеровой характеристике.]*

Доказательство. Можно считать, что все нули сечения s находятся в маленьком диске $D^n \subset M^n$. Тогда над $M^n \backslash D^n$ имеется сечение расслоения $V_1(\xi)$. Пусть $\varphi : D^n \to M^n$ - вложение. Расслоение $\varphi^* \xi$ над диском D^n тривиально и сечение s над $S^{n-1} = \partial D^n$ определяет отображение $s|_{S^{n-1}}: S^{n-1} \to S^{n-1} = V_{n,1}$. Гомотопический класс $[s|_{S^{n-1}}]$ совпадает, по определению, с $e(\xi)[M^n]$. С другой стороны, этот гомотопический класс однозначно определяется степенью отображения $s|_{S^{n-1}}$. Покажем, что степень равна $\mathrm{ind} s$.

Окружим каждый нуль сечения s в диске D^n маленьким шариком и припишем ему знак ± 1 (индекс пересечения в точке). Сумма этих знаков равна $\mathrm{ind} s$, а отображение $s|_{S^{n-1}}$ гомотопно отображению пропущенному через букет сфер, по одной на каждый шарик, причём, на каждой сфере отображение есть либо сохраняющий либо меняющий ориентацию гомеоморфизм, в зависимости от знака. Таким образом, $\deg s|_{S^{n-1}} = \mathrm{ind} s$. ▶

Следствие. *Пусть ξ - расслоение удовлетворяющее условиям сформулированным перед леммой 4. Класс Штифеля-Уитни $w_n(\xi)$ равен нулю тогда и только тогда, когда любое сечение общего положения пересекается с нулевым сечением в чётном числе точек.*