Топология 4-мерных многообразий. Лекция 2

П.Е. Пушкарь, А.С. Шмелёв

February 25, 1998

- Форма пересечений.
- Сигнатура и теорема ван дер Блий.
- Сигнатура спинорных многообразий.

Пусть M - ориентируемое замкнутое 4-мерное многообразие. Когомологическое умножение $\smile$ определяет симметрическую билинейную форму на $\mathbb{Z}$-модуле $H^2(M;\mathbb{Z})$

$$(a,b) \mapsto a \smile b([M]) \in \mathbb{Z}$$

где $[M]$ - фундаментальный гомологический класс многообразия M. Если класс $a \in H^2(M;\mathbb{Z})$ является элементом конечного порядка, то $a \smile b = 0$, $\forall b \in H^2(M;\mathbb{Z})$, следовательно, умножение $\smile$ определяет симметрическую билинейную форму на свободном $\mathbb{Z}$-модуле $\hat{H}^2(M;\mathbb{Z}) = H^2(M;\mathbb{Z})/Tors$

$$L_M(a,b) = a \smile b([M]); a, b \in \hat{H}^2(M;\mathbb{Z}).$$

Определение. Форма L_M называется формой пересечений замкнутого ориентируемого 4-мерного многообразия M.

Задача. Доказать, что если M - 4-мерное односвязное многообразие, то группа $H^2(M;\mathbb{Z})$ $(H_2(M;\mathbb{Z}))$ не имеет кручения.

Форму пересечений можно определить и в гомологических терминах. Если x и y - некоторые классы из $\hat{H}_2(M;\mathbb{Z}) = H_2(M;\mathbb{Z})/Tors \simeq \hat{H}^2(M;\mathbb{Z})$, то $L_M(x,y) = x \cdot y$ есть их гомологический индекс пересечения.

Симметрическая билинейная форма L_M является унимодулярной, т.е. она определяет изоморфизм (изоморфизм двойственности Пуанкаре)

$$\hat{H}_2(M;\mathbb{Z}) \simeq \hat{H}^2(M;\mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Hom}\left(\hat{H}_2(M;\mathbb{Z}), \mathbb{Z}\right),$$

$$\hat{H}_2(M;\mathbb{Z}) \ni a \mapsto L(a,.) \in \mathrm{Hom}\left(\hat{H}_2(M;\mathbb{Z}), \mathbb{Z}\right).$$

Следовательно, она задается симметрической целочисленной унимодулярной матрицей A_M (матрицей с единичным определителем).

Пример 1. У многообразия $S^2 \times S^2$ образующие циклы в группе 2-мерных гомологий $H_2\left(S^2 \times S^2;\mathbb{Z}\right) = \mathbb{Z}^2$ определяются 2-мерными сферами трансверсально пересекающимися в единственной точке. Следовательно, форма пересечения задается матрицей

$$A_{S^2\times S^2}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Рассмотрим пространство E нетривиального расслоения над S^2 со слоем S^2 (такое расслоение единственно).

Задача. Пространство E диффеоморфно связной сумме $\mathbb{C}P^2\#\overline{\mathbb{C}P}^2$, где $\overline{\mathbb{C}P}^2$ - комплексное проективное пространство с обращенной ориентацией.

В качестве базиса в $H_2(E;\mathbb{Z})$ выберем следующий: e_1 - цикл задаваемый сечением (расслоение E получается из линейного расслоения Хопфа компактизацией каждого слоя бесконечно удалённой точкой), e_2 - цикл задаваемый слоем. Тогда $e_2\cdot e_2=0$, $e_1\cdot e_2=1$ и $e_1\cdot e_1=1$, поскольку два близких сечения можно представить как два близких сечения линейного расслоения Хопфа, которые имеют индекс пересечения равный 1. Следовательно, форма пересечений в базисе $\{e_1,e_2\}$ задается матрицей

$$A_E=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Сделаем замену базиса $\{e_1,e_2\}\mapsto\{f_1=e_1,f_2=e_1-e_2\}$. Тогда $f_1\cdot f_1=e_1\cdot e_1=1$, $f_1\cdot f_2=e_1\cdot e_1-e_1\cdot e_2=0$, $f_2\cdot f_2=e_1\cdot e_1-2e_1\cdot e_2+e_2\cdot e_2=-1$, следовательно, в новом базисе матрица формы пересечений имеет вид

$$A_E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Кольцо когомологий комплексного проективного пространства $H^*(\mathbb{C}P^2;\mathbb{Z})$ есть градуированное кольцо с одной образующей a степени 2, и соотношением $a^3=0$. Следовательно $a\smile a\left(\left[\mathbb{C}P^2\right]\right)=1$ и форма пересечений имеет матрицу $A_{\mathbb{C}P^2}=(1)$. Для проективного пространства с противоположной ориентацией имеем $A_{\overline{\mathbb{C}P}^2}=(-1)$. Таким образом, $L_{\mathbb{C}P^2\#\overline{\mathbb{C}P}^2}=L_{\mathbb{C}P^2}\oplus L_{\overline{\mathbb{C}P}^2}$.

Определение. Пусть H_1 и H_2 - свободные $\mathbb{Z}$-модули, на которых заданы билинейные симметрические формы L_1 и L_2, соответственно. Ортогональной суммой называется прямая сумма $H_1\oplus H_2$, на которой задана билинейная форма $L(x_1+x_2,y_1+y_2)=L_1(x_1,y_1)+L_2(x_2,y_2)$, обозначаемая как $L=L_1\oplus L_2$.

Теорема 1. $L_{M\#N}=L_M\oplus L_N$.

Доказательство. Достаточно доказать изоморфизм $H^2(M\#N;\mathbb{Z})=H^2(M;\mathbb{Z})\oplus H^2(N;\mathbb{Z})$. Это равенство вытекает из точной последовательности Майера-Вьеториса. Представим связную сумму $M\#N$ в виде объединения двух кусков $M\backslash D^4$ и $N\backslash D^4$ пересекающихся по трёхмерной сфере S^3. Имеет место следующая точная последовательность (все гомологии - целочисленные)

$$\cdots\to\underbrace{H_2(S^3)}_{=0}\to H_2\left(M\backslash D^4\right)\oplus H_2\left(N\backslash D^4\right)\to H_2(M\#N)\to\underbrace{H_1(S^3)}_{=0}\to\cdots$$

Так как клеточное разбиение многообразия $M\backslash D^4$ (соответственно $N\backslash D^4$) имеет точно такой же трёхмерный остов, что и M (соответственно N), то $H_2\left(M\backslash D^4\right) = H_2\left(M\right)$ (соответственно $H_2\left(M\backslash D^4\right) = H_2\left(M\right)$. Следовательно $H^2\left(M\#N;\mathbb{Z}\right) = H^2\left(M;\mathbb{Z}\right) \oplus H^2\left(N;\mathbb{Z}\right)$. ▶

Сформулируем несколько общих определений и фактов, относящихся к теории билинейных симметрических форм на свободных $\mathbb{Z}$-модулях.

Определение. Пусть H - свободный конечно порождённый $\mathbb{Z}$-модуль. Симметрическая билинейная форма $L : H \times H \to \mathbb{Z}$ имеет тип II (или является чётной), если ассоциированная с ней квадратичная форма $q\left(x\right) = \frac{1}{2}L\left(x,x\right)$ принимает целые значения (это равносильно четности всех диагональных элементов матрицы формы A). В противном случае форма L называется формой типа I (или нечётной). У нечётной форы ассоциированная квадратичная форма принимает полуцелые значения.

Определим несколько канонических унимодулярных форм.

1. $\pm I$ - форма на $H = \mathbb{Z}$ с матрицей (± 1). Эта форма имеет тип I.

2. U - форма на $H = \mathbb{Z}^2$ с матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Эта форма имеет тип II (на диагонали стоят четные числа).

3. E_8 - форма на $H = \mathbb{Z}^8$ с матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Эта форма так же имеет тип II. Прямое вычисление показывает, что эта матрица унимодулярна и, следовательно, форма унимодулярна.

Симметрическую билинейную форму L можно привести к диагональному виду над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$, следовательно, корректно определена сигнатура $\sigma\left(L\right)$ формы L как разность между числом плюсов и числом минусов в диагональной форме. Для унимодулярной формы (например для формы пересечений) имеет место равенство то $\mathrm{rk}A = \mathrm{rk}H$, где A - матрица формы.

Определение. Унимодулярная форма L называется определённой, если $\left|\sigma\left(L\right)\right| = \mathrm{rk}H$. Унимодулярная форма L называется неопределённой, если $\left|\sigma\left(L\right)\right| < \mathrm{rk}H$.

Определение. Сигнатурой $\sigma\left(M\right)$ многообразия M называется сигнатура его формы пересечений L_M.

Лемма 1. *Если ограничение унимодулярной формы L на подмодуль $H_1 \subset H$ унимодулярно (т.е. матрица ограничения унимодулярна), то $H = H_1 \oplus H_2$, где $H_2 = H_1^{\perp}$ - ортогональное дополнение, причём, ограничение формы L на H_2 унимодулярно и $L = L\mid_{H_1} \oplus L\mid_{H_2}$.*

Доказательство. Если $x \in H_1 \cap H_2$, то $L(x, y) = 0$, $\forall y \in H_1$ и, следовательно, $x = 0$, т.к. ограничение L на H_1 унимодулярно. Пусть $z \in H$ - произвольный элемент. На H_1 определена линейная форма $w \longmapsto L(z, w)$. По определению унимодулярной формы существует единственный элемент $x \in H_1$, такой, что $L(x, w) = L(z, w)$, $\forall w \in H_1$. Тогда $y = z - x \in H_2$, т.е. $z = x + y$, где $x \in H_1$, $y \in H_2$.

Если бы нашёлся такой элемент $y \in H_2$, что $L(y, w) = 0$, $\forall w \in H_2$, то, очевидно, $L(y, w) = 0$, $\forall w \in H$. Следовательно, ограничение L на H_2 является унимодулярной формой. ▶

Лемма 2. *Пусть L - унимодулярная форма на H. Каждому базису $\{x_1, \ldots, x_n\}$ в H соответствует, причём единственный, дуальный базис $\{y_1, \ldots, y_n\}$, т.е. такой, что $L(x_i, y_j) = \delta_{ij}$.*

Доказательство. Матрица $A = (a_{ij}) = (L(x_i, x_j))$ - унимодулярна, т.е. обратима. Пусть $B = A^{-1} = (b_{ij})$, $b_{ij} \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$y_k = b_{1k}x_1 + \ldots + b_{nk}x_n, k = 1, \ldots, n$$

есть искомый дуальный базис. ▶

Лемма 3. *Если L - неопределённая унимодулярная форма на H, то найдётся такой ненулевой элемент $x \in H$, что $L(x, x) = 0$.*

[Эта лемма вытекает из теоремы Хассе-Минковского, см. Дж. Милнор, Д. Хьюзмоллер. Симметрические билинейные формы.]

Теорема 2. *Неопределённая унимодулярная форма типа I обладает ортонормированным базисом, т.е. представляется в виде прямой суммы канонических форм типа $\pm I$.*

Доказательство. Для $\mathbb{Z}$-модуля ранга 1 утверждение очевидно. Пусть утверждение уже доказано для модулей ранга $\leq n-1$, и пусть H - модуль ранга n. По лемме 3 найдётся элемент $x_1 \in H$, такой, что $L(x_1, x_1) = 0$, причём, можно считать, что элемент x_1 - неделим (т.е. не существует такого x_1', что $x_1 = ax_1'$, $a \in \mathbb{Z}$). Следовательно элемент x_1 дополняется до базиса $\{x_1, \ldots, x_n\}$ в H. Пусть $\{y_1, \ldots, y_n\}$ - дуальный базис. Тогда $L(x_1, y_1) = 1$. В последнем базисе найдётся такой элемент y_k, что $L(y_k, y_k)$ - нечётно (т.к. L - имеет тип I). Если $L(y_1, y_1)$ - нечётно, то рассмотрим подмодуль $H_1 = \langle x_1, y_1 \rangle$. В противном случае рассмотрим подмодуль $H_1 = \langle x_1, y_1 + y_k \rangle$, тогда $L(y_1 + y_k, y_1 + y_k)$ - нечётно.

Ограничение формы L на H_1 имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad a = 2m + 1.$$

Выполним замену базиса в H_1: $e_1 = y_1 + y_k - mx_1$, $e_2 = y_1 + y_k - (m+1)x_1$. Тогда $L(e_1, e_1) = a - 2m = 1$, $L(e_2, e_2) = a - 2(m+1) = -1$, $L(e_1, e_2) =$

$a-(m+1)-m=0$, и в новом базисе ограничение формы L на H_1 имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

т.е. $L\mid_{H_1}=I\oplus(-I)$.

Пусть $H_2=H_1^{\perp}$. Тогда одна из форм $L\mid_{H_2}\oplus I$ или $L\mid_{H_2}\oplus(-I)$ является неопределённой унимодулярной (по лемме 1) формой типа I на модуле ранга $n-1$ и обладает ортонормированным базисом по предположению индукции. ▶

Определение. Пусть L - унимодулярная форма на H. Элемент $u\in H$ называется характеристическим, если $L(u,x)=L(x,x)\,(\mathrm{mod}2)$, $\forall x\in H$.

Теорема 3 (ван дер Блий). *Для любой унимодулярной формы L на H существует характеристический элемент и если u - характеристический элемент, то $L(u,u)=\sigma(L)\,(\mathrm{mod}8)$.*

Доказательство. Рассмотрим $\mathbb{Z}_2$-модуль $H\otimes\mathbb{Z}_2=H/2H$. Форма L индуцирует унимодулярную $\mathbb{Z}_2$-значную форму $\hat{L}$ на $H/2H$.

$$\hat{L}(\hat{x},\hat{y})=L(x,y)\,(\mathrm{mod}2),$$

где $\hat{x}$ - класс элемента $x\in H$, $\hat{y}$ - класс $y\in H$.

Функция $\hat{x}\longmapsto\hat{L}(\hat{x},\hat{x})$ является линейной на пространстве $H/2H$. Действительно, $\hat{L}(\lambda\hat{x},\lambda\hat{x})=\lambda^2\hat{L}(\hat{x},\hat{x})=\lambda\hat{L}(\hat{x},\hat{x})$, $\lambda\in\mathbb{Z}$ и $\hat{L}(\hat{x}+\hat{y},\hat{x}+\hat{y})=\hat{L}(\hat{x},\hat{x})+\hat{L}(\hat{y},\hat{y})$, так как $2L(x,y)=0\,(\mathrm{mod}2)$. Следовательно, существует единственный элемент $\hat{u}\in H/2H$, такой, что

$$\hat{L}(\hat{x},\hat{x})=\hat{L}(\hat{u},\hat{x}),\quad\forall\hat{x}\in H/2H.$$

Любой представитель $u\in H$ класса $\hat{u}$ является, очевидно, характеристическим элементом. Кроме того, класс числа $L(u,u)\,(\mathrm{mod}8)$ является инвариантом формы L аддитивным относительно прямых сумм. Действительно, если u' - другой характеристический элемент, то $u'=u+2x$ и

$$L(u',u')=L(u,u)+4\underbrace{(L(u,x)+L(x,x))}_{\text{чётно}}=L(u,u)\,(\mathrm{mod}8).$$

Если u_i - характеристический элемент формы L_i, то $L(u_1+u_2,u_1+u_2)=L_1(u_1,u_1)+L_2(u_2,u_2)$, где $L=L_1\oplus L_2$. Это означает аддитивность инварианта.

Для формы $L=I$ на $\mathbb{Z}$ характеристический элемент $u=1$ (т.к. $1\cdot x=x\cdot x\,(\mathrm{mod}2)$) и $L(u,u)=1\,(\mathrm{mod}8)$. Аналогично, для формы $L=-I$ характеристический элемент $u=1$ и $L(u,u)=-1\,(\mathrm{mod}8)$. Следовательно, для неопределённых унимодулярных форм L типа I имеет место равенство $L(u,u)=\sigma(L)\,(\mathrm{mod}8)$.

В случае произвольной унимодулярной формы L рассмотрим прямую сумму $L_1=L\oplus I\oplus(-I)$. L_1 - неопределённая форма типа I и, следовательно, $L_1(u_1,u_1)=\sigma(L_1)\,(\mathrm{mod}8)$. Поскольку $\sigma(L)=\sigma(L_1)$ и $L(u,u)=$

$L_1(u_1,u_1)\,(\mathrm{mod}8)$ (т.к. соответствующий инвариант для $I\oplus(-I)$ равен нулю), то $L(u,u)=\sigma(L)\,(\mathrm{mod}8)$. ▶

Следствие. Сигнатура унимодулярной формы типа II делится на 8.

Доказательство. Нулевой элемент $u=0\in H$ является характеристическим для формы L типа II т.к. $L(x,x)=0\,(\mathrm{mod}2)$. Следовательно $\sigma(L)=L(0,0)=0\,(\mathrm{mod}8)$. ▶

Хотя полной классификации унимодулярных определённых форм неизвестно, существует классификация неопределённых форм типа II, аналогичная теореме 2.

Теорема 4(Серр). *Если L - неопределённая унимодулярная форма типа II на H, то $L=aE_8\oplus bU$, где $a=\frac{1}{8}\sigma(L)\in\mathbb{Z}$ и $b=\frac{1}{2}\left(\mathrm{rk}H-|\sigma(L)|\right)$.*

[см., например, Дж. Милнор, Д. Хьюзмоллер. Симметрические билинейные формы.]

Теорема 5. *Пусть $M=M^4$ - замкнутое односвязное многообразие. Элемент $u\in H^2(M;\mathbb{Z})$ является характеристическим элементом формы пересечений L_M тогда и только тогда, когда его приведение по модулю 2 совпадает со вторым классом Штифеля-Уитни касательного расслоения, $u=w_2(\tau_M)\,(\mathrm{mod}2)$.*

Доказательство. Пусть $x\in H^2(M;\mathbb{Z})$ и $\bar{x}=D(x)\in H_2(M;\mathbb{Z})$ - цикл двойственный к x по Пуанкаре. Элемент $u\in H^2(M;\mathbb{Z})$ является характеристическим тогда и только тогда, когда $\forall\bar{x}\in H_2(M;\mathbb{Z})$ выполнено

$$u(\bar{x})=\bar{x}\circ\bar{x}\,(\mathrm{mod}2)\,.$$

Поэтому достаточно доказать, что $w_2(\bar{x})=0$, если $\bar{x}\circ\bar{x}$ - чётно и $w_2(\bar{x})=1$, если $\bar{x}\circ\bar{x}$ - нечётно, где $\bar{x}$ - образующий цикл (т.е. представляется сферой, т.к. M - односвязно).

Пусть $\tau_{\bar{x}}$ и $\nu_{\bar{x}}$ - касательное и нормальное расслоения к $\bar{x}$, тогда

$$w_2(\bar{x})=w_2\left(\tau_M\mid_{\bar{x}}\right)[\bar{x}]\,,$$

где $\tau_M\mid_{\bar{x}}=\tau_{\bar{x}}\oplus\nu_{\bar{x}}$. Следовательно $w_2(\bar{x})=w_2(\nu_{\bar{x}})$, т.к. классы Штифеля-Уитни касательного расслоения к сфере тривиальны. Теперь утверждение вытекает из того, что класс $w_2(\nu_{\bar{x}})$ получается из класса Эйлера $e(\nu_{\bar{x}})$ приведением по модулю 2. ▶

Следствие. *Форма пересечений спинорного односвязного 4-мерного многообразия имеет тип II.*

Доказательство. Поскольку класс $w_2(\tau_M)=0$, то в качестве характеристического элемента возьмём $u=0$. Тогда $L_M(x,x)=0\,(\mathrm{mod}2)$, $\forall x\in H^2(M;\mathbb{Z})$. Следовательно, L_M - форма типа II. ▶

Следствие. *Сигнатура спинорного односвязного 4-мерного многообразия делится на 8.*

Замечание. В последних следствиях не предполагается гладкости многообразия. Вместо односвязности можно было требовать $H_1(M;\mathbb{Z})=0$.

Позже будет доказана теорема Рохлина, которая говорит о том, что сигнатура гладкого (=PL) спинорного односвязного (или с $H_1(M;\mathbb{Z})=0$) 4-мерного многообразия делится на 16. В частности, если сигнатура не делится на 16 (а лишь на 8) то на таком многообразии не существует гладкой структуры. Пример такого спинорного многообразия существует. Оно имеет форму пересечений E_8.