Топология 4-мерных многообразий. Лекция 3

П.Е. Пушкарь, А.С. Шмелёв

February 26, 1998

- Теорема Понтрягина-Уайтхеда.
- Понятие h-кобордизма.

Следующая теорема, доказанная в 1949г. Понтрягиным и (независимо) Уайтхедом, позволяет получить полную гомотопическую классификацию замкнутых односвязных ориентированных четырехмерных многообразий.

Пусть M_1, M_2 — замкнутые односвязные ориентированные четырехмерные многообразия. Обозначим через L_i форму пересечения на $H^2(M_i, \mathbb{Z})$ $(i = 1, 2)$.

Теорема 1. *Многообразия M_1 и M_2 ориентированно гомотопически эквивалентны если и только если пространства $(H^2(M_1, \mathbb{Z}), L_1)$ и $(H^2(M_2, \mathbb{Z}), L_2)$ изоморфны как пространства с внутренним произведением.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Для начала вырежем из многообразия M_1 маленький диск D^4.

Лемма 1. *Пространство $M_1 \setminus D^4$ гомотопически эквивалентно букету двумерных сфер в числе, равном рангу второй группы (ко)гомологий многообразия M_1.*

$$M_1 \sim \underbrace{S^2 \vee \ldots \vee S^2}_{k}, \quad k = \operatorname{rk} H_2(M_1)$$

Доказательство леммы 1. Вначале докажем, что $H_i(M_1 \setminus D^4) = H_i(\underbrace{S^2 \vee \ldots \vee S^2}_{k}), \quad k = \operatorname{rk} H_2(M_1)$ (все (ко)гомологии - с целыми коэффициентами). Действительно, рассмотрим точную последовательность пары $(M_1, M_1 \setminus D^4)$. (Заметим, что $H_j(M_1, M_1 \setminus D^4) = \bar{H}_j(S^4)$.)

$$\ldots \to H_{j+1}(M_1, M_1 \setminus D^4) \to H_j(M_1 \setminus D^4) \to H_j(M_1) \to H_j(M_1, M_1 \setminus D^4) \to \ldots$$

При $j > 4$ имеем $H_j(M_1, M_1 \setminus D^4) = 0$, $H_j(M_1) = 0$. Следовательно $H_j(M_1 \setminus D^4) = 0$.

Отображение $H_4(M_1) \to H_4(M_1, M_1 \setminus D^4)$ — изоморфизм. Следовательно $H_4(M_1 \setminus D^4) = 0$.

Поскольку отображение $H_4(M_1) \to H_4(M_1, M_1 \setminus D^4)$ — изоморфизм, то $H_3(M_1, M_1 \setminus D^4) \simeq H_3(M_1) = 0$.

Также из точности последовательности следуют оставшиеся равенства. Так как $0 = \pi_1(M_1) = \pi_1(M_1 \setminus pt) = \pi_1(M_1 \setminus D^4)$, то по теореме Гуревича

$$\pi_2(M_1 \setminus D^4) \simeq H_2(M_1 \setminus D^4).$$

Построим отображение букета $\underbrace{S^2 \vee \ldots \vee S^2}_{k}, \quad k = \operatorname{rk} H_2(M_1)$ в $M_1 \setminus D^4$, индуцирующее изоморфизм в гомологиях («цветок» букета переходит в соответствующую образующую решетки $H_2(M_1) \simeq H_2(M_1 \setminus D^4)$). Мы построили отображение односвязных пространств, индуцирующее изоморфизм в гомологиях и изоморфизм вторых гомотопических групп. Многообразие $M_1 \setminus D^4$ имеет гомотопический тип клеточного пространства, следовательно по теореме Уайтхеда, это отображение является гомотопической эквивалентностью. Построенное отображение зависит от базиса $H_2(M_1, \mathbb{Z})$. ▶

Таким образом, при помощи Леммы 1, мы видим, что многообразие M_1 получается из букета двумерных сфер, к которому приклеена четырехмерная клетка. Приклеивающее отображение представляет элемент $\pi_3(\underbrace{S^2 \vee \ldots \vee S^2}_{k})$. Вычислим эту группу.

Утверждение. $\pi_3(\underbrace{S^2 \vee \ldots \vee S^2}_{k})$ — *свободная абелева группа ранга* $C^2_{k+1} = \frac{k(k+1)}{2}$.

Доказательство утверждения.

Рассмотрим вложение

$$\underbrace{S^2 \vee \ldots \vee S^2}_{k} \subset \underbrace{S^2 \times \ldots \times S^2}_{k} \subset \underbrace{\mathbb{C}P^\infty \times \ldots \times \mathbb{C}P^\infty}_{k}$$

Рассмотрим пару $(\underbrace{\mathbb{C}P^\infty \times \ldots \times \mathbb{C}P^\infty}_{k}, \underbrace{S^2 \vee \ldots \vee S^2})$.

Первый шаг. Из точной гомотопической последовательности пары (поскольку $\mathbb{C}P^\infty = K(\mathbb{Z}, 2)$) видно, что

$$\pi_3(\underbrace{S^2 \vee \ldots \vee S^2}_{k}) \simeq \pi_4(\underbrace{\mathbb{C}P^\infty \times \ldots \times \mathbb{C}P^\infty}_{k}, \underbrace{S^2 \vee \ldots \vee S^2}_{k}).$$

Второй шаг. Напомним относительную теорему Гуревича. Для начала напомним, что корректно определен относительный гомоморфизм Гуревича $h : \pi_n(A, B) \to H_n(A, B)$.

Относительная теорема Гуревича. *Рассмотрим топологическую пару (A, B) пространств, относительно которых предположим, что выполняются следующие условия: пространства A и B связны и односвязны,* $\pi_2(A, B) = 0$.

1) *Если* $\pi_3(A, B) = \ldots = \pi_{n-1}(A, B) = 0 (n \geq 3)$, *то* $H_1(A, B) = H_2(A, B) = \ldots = H_{n-1}(A, B) = 0$ *и* $h : \pi_n(A, B) \to H_n(A, B)$ *есть изоморфизм.*

1) *Если* $H_3(A,B) = \ldots = H_{n-1}(A,B) = 0$, *то* $\pi_3(A,B) = \ldots = \pi_{n-1}(A,B) = 0$ *и* $h : \pi_n(A,B) \to H_n(A,B)$ *есть изоморфизм.* ▶

[Доказательство см. в А.Т. Фоменко, Д.Б. Фукс. Курс гомотопической топологии.]

Воспользуемся относительной теоремой Гуревича, чтобы доказать, что $\pi_4(\underbrace{\mathbb{C}P^\infty \times \ldots \times \mathbb{C}P^\infty}_k, \underbrace{S^2 \vee \ldots \vee S^2}_k) \simeq H_4(\underbrace{\mathbb{C}P^\infty \times \ldots \times \mathbb{C}P^\infty}_k, \underbrace{S^2 \vee \ldots \vee S^2}_k)$. Действительно, условия теоремы Гуревича выполняются — во-первых наши пространства связны и односвязны. Во-вторых, $\pi_2(\mathbb{C}P^\infty \times \ldots \times \mathbb{C}P^\infty, S^2 \vee \ldots \vee S^2) = 0$, поскольку любой относительный двумерный сфероид гомотопен настоящему двумерному сфероиду (букет односвязен), а любой двумерный сфероид может быть размещен на букете (вложение $S^2 \vee \ldots \vee S^2$ в $\mathbb{C}P^\infty \times \ldots \times \mathbb{C}P^\infty$ индуцирует изоморфизм вторых гомотопических групп). Докажем, что $\pi_3(\mathbb{C}P^\infty \times \ldots \times \mathbb{C}P^\infty, S^2 \vee \ldots \vee S^2) = 0$. Рассмотрим отрезок точной гомотопической последовательности пары $(\mathbb{C}P^\infty \times \ldots \times \mathbb{C}P^\infty, S^2 \vee \ldots \vee S^2)$:

$$\ldots \to \pi_3(\mathbb{C}P^\infty \times \ldots \times \mathbb{C}P^\infty) \to \pi_3(\mathbb{C}P^\infty \times \ldots \times \mathbb{C}P^\infty, S^2 \vee \ldots \vee S^2) \to$$

$$\to \pi_2(S^2 \vee \ldots \vee S^2) \to \pi_2(\mathbb{C}P^\infty \times \ldots \times \mathbb{C}P^\infty) \to \ldots.$$

Крайняя правая стрелка — изоморфизм, крайняя левая группа — нулевая. Следовательно $\pi_3(\mathbb{C}P^\infty \times \ldots \times \mathbb{C}P^\infty, S^2 \vee \ldots \vee S^2) = 0$ и, по теореме Гуревича, $\pi_4(\mathbb{C}P^\infty \times \ldots \times \mathbb{C}P^\infty, S^2 \vee \ldots \vee S^2) \simeq H_4(\mathbb{C}P^\infty \times \ldots \times \mathbb{C}P^\infty, S^2 \vee \ldots \vee S^2)$.

Последний шаг нашего вычисления — рассмотрим точную гомологическую последовательности пары $(\mathbb{C}P^\infty \times \ldots \times \mathbb{C}P^\infty, S^2 \vee \ldots \vee S^2)$:

$$\ldots \to H_4(S^2 \vee \ldots \vee S^2) \to H_4(\mathbb{C}P^\infty \times \ldots \times \mathbb{C}P^\infty) \to$$

$$\to H_4(\mathbb{C}P^\infty \times \ldots \times \mathbb{C}P^\infty, S^2 \vee \ldots \vee S^2) \to H_3(S^2 \vee \ldots \vee S^2) \to \ldots.$$

Крайние группы нулевые. Таким образом мы доказали, что

$$\pi_3(\underbrace{S^2 \vee \ldots \vee S^2}_k) \simeq H_4(\underbrace{\mathbb{C}P^\infty \times \ldots \times \mathbb{C}P^\infty}_k).$$

Упражнение. $H_4(\underbrace{\mathbb{C}P^\infty \times \ldots \times \mathbb{C}P^\infty}_k)$. — свободная абелева группа ранга C^2_{k+1}.

Доказательство утверждения закончено. ▶

Продолжим доказательство теоремы Понтрягина-Уайтхеда. Нам понадобятся доказательства Леммы 1 и Утверждения. Зафиксируем базисы в $H_2(M_i, \mathbb{Z})$, $i = 1, 2$, такие, что формы пересечения имеют в них одинаковые матрицы. Пользуясь конструкцией леммы 1 получаем, что многообразие M_i гомотопически эквивалентно букету сфер к которому приклена четырехмерная клетка по элементу $\alpha_i \in \pi_3(S^2 \vee \ldots \vee S^2)$ (обозначим это пространство через V_i). Докажем, что эти элементы совпадают. Воспользуемся конструкциями доказательства Утверждения. В утверждении была построена цепочка естественных изоморфизмов:

$$\pi_3(S^2 \vee \ldots \vee S^2) \simeq \pi_4(\mathbb{C}P^\infty \times \ldots \times \mathbb{C}P^\infty, S^2 \vee \ldots \vee S^2) \simeq$$

$$\simeq H_4(\mathbb{C}P^\infty \times \ldots \times \mathbb{C}P^\infty, S^2 \vee \ldots \vee S^2) \simeq H_4(\mathbb{C}P^\infty \times \ldots \times \mathbb{C}P^\infty).$$

Пользуясь этой цепочкой, построим по элементу $\alpha_i \in \pi_3(S^2 \vee \ldots \vee S^2)$ элемент $\beta_i \in H_4(\mathbb{C}P^\infty \times \ldots \times \mathbb{C}P^\infty)$. А также построим отображение $F^i : V_i \to \mathbb{C}P^\infty \times \ldots \times \mathbb{C}P^\infty$. Нам нужно проверить, что элементы β_1 и β_2 совпадают. Рассмотрим группу $H^4(\mathbb{C}P^\infty \times \ldots \times \mathbb{C}P^\infty, \mathbb{Z})$. Ее базис образуют элементы $a_m \smile a_l$ $1 \leq m \leq l \leq k = \operatorname{rk} H_2(M_i)$. Здесь $a_1, \ldots, a_k$ — базис $H^2(\mathbb{C}P^\infty \times \ldots \times \mathbb{C}P^\infty, \mathbb{Z}) = \operatorname{Hom}(H_2(\mathbb{C}P^\infty \times \ldots \times \mathbb{C}P^\infty), \mathbb{Z})$, двойственный базису, образованному «цветками» букета двумерных сфер, вложенного в $\mathbb{C}P^\infty \times \ldots \times \mathbb{C}P^\infty$.

Для того, чтобы элементы β_1 и β_2 совпали, необходимо и достаточно, чтобы на них совпали значения элементов базиса $H^4(\mathbb{C}P^\infty \times \ldots \times \mathbb{C}P^\infty, \mathbb{Z})$. Имеем:

$$(a_m \smile a_l)(\beta_i) = (a_m \smile a_l)(F^i_*([V_i])) = ((F^i)^* a_m \smile (F^i)^* a_l)([V_i])$$

Элементы $(F^i)^* a_m$ соответствуют, при изоморфизме вторых групп когомологий, индуцированном гомотопической эквивалентностью, элементам базиса $H^2(M_i, \mathbb{Z})$ двойственного по Пуанкаре к зафиксированному. Таким образом, $((F^i)^* a_m \smile (F^i)^* a_l)([V_i])$ — элементы матрицы пересечений в базисе $H^2(M_i, \mathbb{Z})$ двойственном по Пуанкаре к зафиксированному. Следовательно, элементы β_1 и β_2 совпадают. ▶

Для того, чтобы продвинуться дальше, нам понадобится понятие h-кобордизма.

Определение. Многообразия M_1 и M_2 называются h-кобордантными, если найдется такой кобордизм, что включение M_i в край является гомотопической эквивалентностью M_i и многообразия-кобордизма.

Наша следующая цель — доказать следующую теорему, независимо доказанную Новиковым и Уоллом:

Теорема 2. *Два гомотопически эквивалентные гладкие замкнутые односвязные четырехмерные многообразия h-кобордантны.*

Соединяя эти две теоеремы, получаем, что гладкие замкнутые односвязные четырехмерные многообразия h-кобордантны если и только если их формы пересечения изоморфны.