Топология 4-мерных многообразий. Лекция 6

П.Е. Пушкарь, А.С. Шмелёв

March 25, 1998

- Arf-инвариант.
- Теорема Рохлина.
- Поверхность Куммера.

Пусть V - конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{Z}_2$ с невырожденной симметрической билинейной формой $L : V \times V \to \mathbb{Z}_2$. Так как над $\mathbb{Z}_2$ симметрическая билинейная форма является одновременно и кососимметрической, то в пространстве V существует симплектический базис $e_1, \ldots, e_r, f_1, \ldots, f_r$, $L(e_i, e_j) = L(f_i, f_j) = 0$, $L(e_i, f_j) = \delta_{ij}$.

Определение. Функция $q : V \to \mathbb{Z}_2$ называется квадратичной по отношению к форме L, если она удовлетворяет соотношению $q(x+y) = q(x) + q(y) + L(x,y)$, $\forall x, y \in V$. Arf-инвариантом квадратичной формы q называется сумма $Arf(q) = \sum_{i=1}^{r} q(e_i) \cdot q(f_i) \in \mathbb{Z}_2$.

Пример. Пусть L - форма типа II на $\mathbb{Z}$-модуле H. Тогда определена квадратичная форма $q(x) = \frac{1}{2} L(x,x)$. Форма q удовлетворяет соотношению $q(x+y) = q(x) + q(y) + L(x,y)$ и принимает чётные значения на подмодуле $2H$. Следовательно она определяет квадратичную форму на линейном $\mathbb{Z}_2$-пространстве $V = H/2H$.

Задача 1. Проверить, что сумма в определении Arf-инварианта не зависит от выбора симплектического базиса.

Задача 2. Доказать, что два квадратичных $\mathbb{Z}_2$-пространства (V_1, q_1) и (V_2, q_2) изоморфны тогда и только тогда, когда $\dim V_1 = \dim V_2$ и $Arf(q_1) = Arf(q_2)$.

Теорема 1. *Пусть M^4 - гладкое (=**PL**) односвязное многообразие. Любой элемент $x \in H_2(M^4; \mathbb{Z})$ можно реализовать гладким вложенным ориентированным замкнутым 2-мерным подмногообразием F_x (т.е. $x = f_* [F_x]$ для некоторого вложения $f : F_x \to M^4$, где $[F_x]$ - фундаментальный гомологический класс).*

Доказательство. Поскольку M^4 - односвязно, по теореме Гуревича имеет место изоморфизм $H_2(M^4; \mathbb{Z}) \simeq \pi_2(M^4)$. Следовательно, элемент $x \in H_2(M^4; \mathbb{Z})$ можно реализовать гладко погруженной ориентированной двумерной сферой S_x, имеющей конечное число двойных трансверсальных самопересечений $p_1, \ldots, p_n$ (по соображениям размерности). Пусть p_1 - одна из точек самопересечения. Выберем в окрестности точки p_1 локальные комплексные координаты z, w, в которых S_x задаётся уравнением

$z^2+w^2=0$ (вместе с ориентацией). Заменим поверхность S_x в окрестности точки p_1 ориентированной поверхностью (цилиндром $S^1\times\mathbb{R}^1$) определяемой уравнением $z^2+w^2=\varepsilon$, где ε - маленькое. Вне рассматриваемой окрестности точки оставим погружение S_x без изменений. Повторяя эту процедуру для каждой точки самопересечения получим искомое вложенное многообразие F_x. Процедура уничтожения самопересечения состоит в следующем. На пересекающихся кусках поверхности S_x вырезаем два маленьких диска с центром в точке самопересечения и вклеиваем цилиндр $S^1\times I$, $I=[0,1]$ основаниями к краям полученных дырок. ▶

Пусть $\left(M^4,\partial M^4\right)$ есть связное гладкое ориентируемое многообразие с краем. Для простоты будем считать, что $\pi_1\left(M^4\right)=0$. Пусть $\left(F^2,\partial F^2\right)\subset\left(M^4,\partial M^4\right)$ - ориентированная собственно вложенная поверхность с краем (где $\partial F^2=\emptyset$ или $\partial F^2=S^1$). Определим квадратичное отображение $q:H_1\left(F^2;\mathbb{Z}_2\right)\to\mathbb{Z}_2$. Пусть гомологический класс $u\in H_1\left(F^2;\mathbb{Z}_2\right)$ реализуется погруженной окружностью $C=S^1\subset F^2$. Так как $H^1\left(M^4;\mathbb{Z}\right)=0$, то C ограничивает связную ориентируемую погруженную 2-мерную поверхность $D\subset M^4$, $\partial D=C$. Можно считать, что кроме точек C имеется конечное число точек трансверсального пересечения поверхностей F^2 и D. Поскольку $D\sim S^1\vee\ldots\vee S^1$ (гомотопическая эквивалентность), то нормальное расслоение ν_D тривиально (т.к. оно ориентируемо).

Всякая тривиализация $\tau:E\left(\nu_D\right)\to D\times\mathbb{R}^2$ индуцирует единственную каноническую тривиализацию на крае $E\left(\nu_D\right)\simeq C\times\mathbb{R}^2$. Действительно, если τ_1 и τ_2 - две разные тривиализации расслоения ν_D, то переход от одной к другой задаётся непрерывным отображением $g:D\to SO\left(2\right)$. Поскольку $\deg g\mid_{\partial D}=0$ (т.к. $g\mid_{\partial D}\colon S^1\to S^1$ продолжается на D), то отображение $g\mid_{\partial D}\colon C\to SO\left(2\right)$ гомотопно постоянному отображению в точку и, следовательно, тривиализации τ_1 и τ_2 совпадают на C.

Нормальное одномерное расслоение ν_C окружности C в F^2 определяет ориентируемое одномерное подрасслоение в $\nu_D\mid_{\partial D}$. Пусть $o\left(D\right)$ - число оборотов (по mod2) подрасслоения ν_C в $\nu_D\mid_{\partial D}$ по отношению к канонической тривиализации. Пусть $D\circ F$ - число точек пересечения (по mod2) поверхностей $\operatorname{int}\left(D\right)$ и F^2. Пусть $\operatorname{Self}\left(C\right)$ - индекс самопересечения окружности C в F^2 (по mod2). Определим $q\left(C\right)$ равенствами

$$q\left(C\right)=o\left(D\right)+D\circ F+\operatorname{Self}\left(C\right),$$

$$q\left(C\right)=0,\quad\text{если } C\text{ - граница.}$$

Это даёт корректно определённую квадратичную форму на $H_1\left(F^2;\mathbb{Z}_2\right)$ относительно $\mathbb{Z}_2$-формы пересечений на F^2. Действительно, индекс самопересечения суммы вычисляется по формуле $\left(C_1+C_2\right)\circ\left(C_1+C_2\right)=C_1\circ C_1+C_2\circ C_2+C_1\circ C_2$, следовательно

$$q\left(C_1+C_2\right)=o\left(D_1+D_2\right)+\left(D_1+D_2\right)\circ F+\operatorname{Self}\left(C_1+C_2\right)=$$

$$=o\left(D_1\right)+o\left(D_2\right)+D_1\circ F+D_2\circ F+\operatorname{Self}\left(C_1\right)+\operatorname{Self}\left(C_2\right)+C_1\circ C_2=$$

$$=q\left(C_1\right)+q\left(C_2\right)+C_1\circ C_2.$$

где $C_1 + C_2$ - связная сумма двух погруженных окружностей, $D_1 + D_2$ - погруженная в M^4 поверхность, краем которой является $C_1 + C_2$. $D_1 + D_2$ получается из дизъюнктного объединения $D_1 \sqcup D_2$ вырезанием двух маленьких полудисков на краях и вклеиванием полоски. Ясно, что $(D_1 + D_2) \circ F = D_1 \circ F + D_2 \circ F$. Кроме того, $o(D_1 + D_2) = o(D_1) + o(D_2) + o(D)$, где D - поверхность склеенная из вышеупомянутых полудисков и полоски, причём, $o(D) = 0$. Если C_2 - граница, то $C_1 \circ C_2 = 0$, для любого цикла C_1. Следовательно, $q(C_1 + C_2) = q(C_1)$ и функция q корректно определена на гомологиях.

Обозначим через $Arf\left(F^2\right)$ Arf-инвариант построенной формы q.

Определение. Два вложения $f_0, f_1 : M \to N$ называются конкордантными, если существует вложение $F : M \times I \to N \times I$ такое, что $F(M \times 0) \subset N \times 0$, $F(M \times 1) \subset N \times 1$, $F\mid_{M\times 0} = f_0$ и $F\mid_{M\times 1} = f_1$.

Лемма. *$Arf\left(F^2\right)$ зависит только от относительного целочисленного гомологического класса $\left[F^2, \partial F^2\right]$ и класса конкордантных вложений $\partial F^2 \to \partial M^4$.*

В частности, если $\partial M^4 = \emptyset$ (тогда $\partial F^2 = \emptyset$) то $Arf\left(F^2\right)$ определяется целочисленным гомологическим классом $\xi = \left[F^2\right] \in H_2\left(M^4; \mathbb{Z}\right)$ и обозначается $Arf(\xi)$ (класс ξ является характеристическим, то есть его приведение по mod2 является классом двойственным по Пуанкаре классу Штифеля-Уитни $w_2\left(M^4\right)$). Другим специальным случаем является случай узлов, где $M^4 = D^4$, $\partial M^4 = S^3$, $\partial F^2 = S^1$. Тогда $\left[F^2, \partial F^2\right] = 0$, конкордантность есть изотопность узлов и $Arf\left(F^2\right)$ определяется классом изотопности узла K, $\partial F^2 \to S^3$. Это определяет так называемый Arf-инвариант узла, обозначаемый $Arf(K)$.

Доказательство леммы. Будем считать, что $\partial M^4 = \emptyset$ и $\partial F^2 = \emptyset$. В общем случае доказательство аналогично.

Пусть F_0 и F_1 две замкнутые гомологичные характеристические поверхности, $[F_0] = [F_1] \in H_2\left(M^4; \mathbb{Z}\right)$. Рассмотрим пространство $K(\mathbb{Z}, 2) = \mathbb{C}P^\infty$. Образующая $a \in H^2(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z})$ кольца когомологий $H^*(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z})$ является фундаментальным когомологическим классом пространства $K(\mathbb{Z}, 2)$ и имеет место изоморфизм $\varphi : \left[M^4, K(\mathbb{Z}, 2)\right] \to H^2\left(M^4; \mathbb{Z}\right)$, $\varphi([f]) = f^* a$, где $\left[M^4; K(\mathbb{Z}, 2)\right]$ - множество гомотопических классов отображений из M^4 в $K(\mathbb{Z}, 2)$.

По теореме о клеточной аппроксимации $\left[M^4, K(\mathbb{Z}, 2)\right] = \left[M^4, \mathbb{C}P^2\right]$. Рассмотрим композицию изоморфизма φ и изоморфизма двойственности Пуанкаре

$$\left[M^4, \mathbb{C}P^2\right] \xrightarrow{\varphi} H^2\left(M^4, \mathbb{Z}\right) \xrightarrow{D} H_2\left(M^4, \mathbb{Z}\right)$$

$$f \to f^* a \to f^* a \frown \left[M^4\right]$$

Пусть $f_i : M^4 \to \mathbb{C}P^2$ - отображения, определённые однозначно с точностью до гомотопии, для которых $[F_i] = (f_i)^* a \frown \left[M^4\right]$, $i = 0, 1$. Класс $a \in H^2\left(\mathbb{C}P^2; \mathbb{Z}\right)$ двойственен по Пуанкаре циклу $\left[\mathbb{C}P^1\right]$ порождённому проективной прямой в $\mathbb{C}P^2$. Выберем отображение f_i трансверсальным к прямой $\mathbb{C}P^1$, тогда $(f_i)_* [F_i] = \left[\mathbb{C}P^1 \cap f_i\left(M^4\right)\right]$. Следовательно, $[F_i] =$

$\left[f_i^{-1}\left(\mathbb{C}P^1\right)\right]$. Равенство $[F_0]=[F_1]$ означает, что существует гомотопия $\Phi: M^4\times I\to\mathbb{C}P^2$ между f_0 и f_1. Можно считать, что гомотопия Φ трансверсальна $\mathbb{C}P^1$. Таким образом, существует гладкое трёхмерное ориентируемое подмногообразие $V^3\subset M^4\times I$ с краем $\partial V^3\subset M^4\times 0\cup M^4\times 1$, где $\partial V^3\cap M^4\times i=F_i$, $i=0,1$.

Пошевелив, если необходимо, V^3, мы будем считать, что проекция $M^4\times I\to I$ определяет функцию Морса $p: V^3\to I=[0,1]$. Это означает, что F_1 получается из F_0 последовательным приклеиванием ручек индексов 0, 1, 2 и 3.

Приклеивание ручек индекса 0 и ручек индекса 1, соединяющих различные компоненты, не меняет формы пересечений и, следовательно, не меняет Arf-инварианта. Приклеивание ручки индекса 1 к одной компоненте поверхности F_0 есть взятие связной суммы $F_0\#T^2$, где T^2 - двумерный тор, т.к. поверхности уровня функции p ориентированы. Следовательно, $L_{F_0\#T^2}=L_{F_0}\oplus L_{T^2}$, где L_{T^2} имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Это вытекает из точной последовательности Майера-Виеториса (все гомологии - с коэффициентами $\mathbb{Z}_2$)

$$H_2\left(F_0\#T^2\right)\xrightarrow{\sim}H_1\left(S^1\right)\xrightarrow{0}H_1\left(F_0\right)\oplus H_1\left(T^2\right)\xrightarrow{\sim}H_1\left(F_0\#T^2\right)\xrightarrow{0}H_0\left(S^1\right)\xrightarrow{\text{моно}}$$

Таким образом, если $c_1\in H_1\left(F_0;\mathbb{Z}_2\right)$, $c_2\in H_1\left(T^2;\mathbb{Z}_2\right)$, то $q_{F_0\#T^2}\left(c_1+c_2\right)=q_{F_0}\left(c_1\right)+q_{T^2}\left(c_2\right)+c_1\circ c_2=q_{F_0}\left(c_1\right)+q_{T^2}\left(c_2\right)$, т.е. $q_{F_0\#T^2}=q_{F_0}\oplus q_{T^2}$ и, следовательно, $Arf\left(F_0\#T^2\right)=Arf\left(F_0\right)+Arf\left(T^2\right)=Arf\left(F_0\right)$.

Итак, приклеивание ручек индексов 0 и 1 не меняет Arf-инварианта. В силу двойственности, приклеивание ручек индексов 2 и 3 также не меняет Arf-инварианта. ▶

Напомним, что целочисленный гомологический класс $\xi\in H_2\left(M^4;\mathbb{Z}\right)$ называется характеристическим, если его приведение по модулю 2 двойственно по Пуанкаре второму классу Штифеля-Уитни многообразия M^4. Другими словами, ξ - гомологический характеристический класс, если для любого гомологического класса $x\in H_2\left(M^4;\mathbb{Z}\right)$ имеет место равенство $L_M(\xi,x)=L_M(x,x)\,(\mathrm{mod}2)$.

Теорема (Рохлин). *Пусть M^4 - ориентированное односвязное замкнутое 4-мерное гладкое (=* **PL***) многообразие и пусть $\xi\in H^2\left(M^4;\mathbb{Z}\right)$ - его целочисленный гомологический характеристический класс. Тогда*

$$Arf(\xi)=\left(\sigma\left(M^4\right)-L(\xi,\xi)\right)/8\,(\mathrm{mod}2),$$

где σ - сигнатура, а L - форма пересечений многообразия M^4. (Заметим, что $\sigma\left(M^4\right)-L(\xi,\xi)$ делится на 8 по теореме ван дер Блий.)

Следствие 1. *Сигнатура замкнутого односвязного спинорного 4-мерного PL-многообразия делится на 16 (т.к. характеристический класс ξ можно выбрать нулевым).*

Следствие 2. *Если целочисленный гомологический характеристический класс ξ представляется сферическим циклом, то $\sigma\left(M^4\right) - L\left(\xi,\xi\right) = 0\,(\mathrm{mod}16)$ (т.к. $Arf\left(\xi\right)=0$).*

Пусть тор $T^2 = S^1 \times S^1$ стандартным образом вложен в сферу S^3. Класс $(p,q) \in H^1\left(T^2;\mathbb{Z}\right) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ реализуется вложенной окружностью если и только если p и q - взаимно просты, или $p=q=0$. В этом случае окружность $K\left(p,q\right)$, представляющая данный класс и рассматриваемая как окружность вложенная в S^3, называется торическим узлом типа (p,q).

Задача. Два торических узла $K\left(p,q\right)$ и $K\left(p',q'\right)$ в S^3 изотопны тогда и только тогда, когда $(p,q) = \pm\left(p',q'\right)$ или $(p,q) = \pm\left(q',p'\right)$.

Для доказательства теоремы Рохлина нам понадобятся следующие два утверждения.

Утверждение 1. *Пусть $K\left(p,q\right)$ - торический узел с нечётным p и чётным q. Тогда $Arf\left(K\left(p,q\right)\right) = \left(1-p^2\right)/8\,(\mathrm{mod}2)$.*

Утверждение 2. *Пусть M^4 - односвязное замкнутое ориентированное 4-мерное гладкое многообразие. Тогда найдутся целые числа $m,n,a,b \geq 0$, такие, что $M^4 \# m\mathbb{C}P^2 \# n\overline{\mathbb{C}P}^2 \approx a\mathbb{C}P^2 \# b\overline{\mathbb{C}P}^2$ (диффеоморфизм), где $\overline{\mathbb{C}P}^2$ - комплексная проективная плоскость с обращённой ориентацией.*

Разберём доказательство утверждения 2, а доказательство утверждения 1 оставляем в качестве упражнения.

Доказательство утверждения 2. Утверждение 2 является одним из следствий теоремы Новикова-Уолла.

В лекции 2 было доказано, что неопределённая унимодулярная форма типа I на свободном $\mathbb{Z}$-модуле имеет ортонормированный базис. Форма пересечений многообразия $M^4 \# \mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P}^2$ является как раз неопределённой унимодулярной формой типа I. Следовательно она эквивалентна форме пересечений многообразия $p\mathbb{C}P^2 \# q\overline{\mathbb{C}P}^2$ для некоторых p,q и по теореме Новикова-Уолла многообразия $M^4 \# \mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P}^2$ и $p\mathbb{C}P^2 \# q\overline{\mathbb{C}P}^2$ являются h-кобордантными. Осталось только применить следующее утверждение, вытекающее из теоремы Новикова-Уолла. ▶

Лемма. *Если M_1^4 и M_2^4 - h-кобордантные односвязные замкнутые 4-мерные гладкие многообразия, то найдутся такие натуральные числа k_1, k_2, что многообразия $M_1^4 \# k_1\mathbb{C}P^2 \# k_2\overline{\mathbb{C}P}^2$ и $M_2^4 \# k_1\mathbb{C}P^2 \# k_2\overline{\mathbb{C}P}^2$ - диффеоморфны.*

Доказательство. Лемма вытекает из доказанного в предыдущей лекции утверждения о том, что если M_1^4 и M_2^4 - h-кобордантные односвязные замкнутые 4-мерные гладкие многообразия, то найдётся такое натуральное число k, что многообразия $M_1^4 \# k\left(S^2 \times S^2\right)$ и $M_2^4 \# k\left(S^2 \times S^2\right)$ - диффеоморфны. Добавление $\#\mathbb{C}P^2$ к обеим частям и использование диффеоморфизма $\left(S^2 \times S^2\right) \# \mathbb{C}P^2 \approx \left(\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P}^2\right) \# \mathbb{C}P^2$ даёт требуемое равенство. ▶

Доказательство теоремы Рохлина. Обе части доказываемой формулы аддитивны относительно взятия связной суммы многообразий и прямой суммы гомологических характеристических классов. Следовательно, по утверждению 2, формулу достаточно доказать в случае $M^4 = \mathbb{C}P^2$ и в случае $M^4 = \overline{\mathbb{C}P}^2$. Так как ориентация здесь не имеет значения, то формулу достаточно доказать в случае $M^4 = \mathbb{C}P^2$.

Пусть $\eta \in H_2(\mathbb{C}P^2;\mathbb{Z})$ - образующая, порождённая комплексной прямой $\mathbb{C}P^1 \subset \mathbb{C}P^2$. Гомологический характеристический класс ξ представляется в виде $\xi = s\eta$, где $s > 0$ - нечётное число.

Для вычисления $Arf(\xi)$ рассмотрим алгебраическую кривую C степени $s > 0$

$$C = \left\{(x:y:z) \mid x^s + y^{s-1}z = 0\right\}.$$

Эта кривая гомеоморфна сфере S^2 и гладко вложена в $\mathbb{C}P^2$ всюду, кроме точки $(0:0:1)$. В этой точке кривая C имеет особенность типа $x^s + y^{s-1} = 0$. Пусть D^4 - маленький шарик с центром в особой точке. Тогда пересечение $C \cap \partial D^4 \subset S^3$ имеет следующую параметризацию $x = -e^{i(s-1)t}$, $y = e^{ist}$, т.е. является торическим узлом типа $K(s-1,s) = K(s,s-1)$. Рассмотрим малое шевеление C_ε кривой C в классе алгебраических кривых степени s. Кривая C_ε является неособой алгебраической кривой степени s, близкой к C вне диска D^4, т.е. $C_\varepsilon \setminus \left(C_\varepsilon \cap D^4\right) \approx D^2$ и $C_\varepsilon \cap \partial D^4 = K(s,s-1)$.

Гомологический класс $[C_\varepsilon] = s\eta = \xi$. Действительно, в карте $\{z \neq 0\}$ кривая C_ε есть множество нулей общего полинома $p(x,y)$ степени s по совокупности переменных. Для каждой точки (x_0, y_0) полином $p_{x_0,y_0}(\lambda) = p(\lambda x_0, \lambda y_0)$ имеет степень s. Следовательно, каждая прямая пересекается с C_ε в s точках (с учётом кратностей). Это определяет разветвлённое s-листное накрытие $\varphi : C_\varepsilon \to \mathbb{C}P^1_\infty$ на бесконечно удалённую прямую (относительно данной карты). Так как $\deg \varphi = s$, то $[C_\varepsilon] = s\left[\mathbb{C}P^1\right] = \xi$.

Далее $Arf(\xi) = Arf(C_\varepsilon)$ в силу аддитивности равен $Arf\left(C_\varepsilon \cap \partial D^4\right) + Arf\left(D^2\right) = Arf\left(C_\varepsilon \cap \partial D^4\right)$, т.е. равен $Arf(K(s,s-1))$. Следовательно, по утверждению 1

$$Arf(\xi) = \left(1 - s^2\right)/8 \,(\mathrm{mod} 2).$$

Последнее равенство является искомым, т.к. $\sigma\left(\mathbb{C}P^2\right) = 1$ и $s^2 = (s\eta) \circ (s\eta) = L(\xi,\xi)$. ▶

В заключении построим пример спинорного замкнутого односвязного многообразия M^4, для которого $\left|\sigma\left(M^4\right)\right| = 16$. Примером такого многообразия является поверхность Куммера (K_3-поверхность)

$$K_3 = \left\{(z_0 : z_1 : z_2 : z_3) \in \mathbb{C}P^3 \mid z_0^4 + z_1^4 + z_2^4 + z_3^4 = 0\right\}.$$

Непосредственно проверяется, что K_3 есть неособая поверхность в $\mathbb{C}P^3$.

Лемма. *Пусть V_d - неособая поверхность степени d в $\mathbb{C}P^n$. Полный класс Чженя $c(V_d)$ есть ограничение на V_d когомологического класса $(1+a)^{n+1} \cdot (1+da)^{-1}$, где $a \in H^2(\mathbb{C}P^n;\mathbb{Z})$ - каноническая образующая кольца $H^*(\mathbb{C}P^n;\mathbb{Z})$.*

Доказательство. Пусть $u \in H^2(\mathbb{C}P^n;\mathbb{Z})$ - когомологический класс двойственный по Пуанкаре циклу $[V_d] \in H_{2n-2}(\mathbb{C}P^n;\mathbb{Z})$, т.к. $u\left(\left[\mathbb{C}P^1\right]\right) = \mathbb{C}P^1 \circ V_d = d$, то $u = da$. Полный класс Чженя нормального расслоения есть $c(\nu_{V_d}) = 1 + u\mid_{V_d}$. Действительно, если z - произвольный 2-цикл в V_d, то сечение расслоения ν_{V_d} над z есть его малое шевеление и $u\mid_{V_d}(z) = [V_d] \circ z$.

Следовательно, $u\ |_{V_d}$ есть препятствие к продолжению ненулевого голоморфного сечения на 2-остов поверхности V_d, т.е. $u\ |_{V_d}= c_1\left(\nu_{V_d}\right)$. Поскольку $\tau_{V_d} \oplus \nu_{V_d} \simeq \tau_{\mathbb{C}P^n}\ |_{V_d}$, то $c\left(V_d\right) \smile \left(1+u\ |_{V_d}\right) = (1+a)^{n+1}\ |_{V_d}$. ▶

Рассмотрим неособую поверхность V_d степени d в $\mathbb{C}P^3$. По предыдущей лемме её полный класс Чженя равен

$$c\left(V_d\right) = \left(1+4a+6a^2+4a^3\right)\left(1-da+d^2a^2-d^3a^3+\ldots\right) =$$

$$= 1 + (-d+4)\, a + \left(d^2-4d+6\right) a^2.$$

Следовательно, класс Понтрягина овеществления V_d имеет вид

$$p_1\left(V_d\right) = c_1^2\left(V_d\right) - 2c_2\left(V_d\right) = (-d+4)^2\, a^2 - 2\left(d^2-4d+6\right) a^2 = \left(-d^2+4\right) a^2.$$

Поскольку $\left[V_d\right] = d\left[\mathbb{C}P^2\right]$ (см. доказательство теоремы Рохлина), то число Понтрягина $p_1\left[V_d\right] = \left(-d^2+4\right) d = -d^3+4d$. Следовательно, по теореме Хирцебруха о сигнатуре (см. лекцию 4)

$$\sigma\left(V_d\right) = \frac{1}{3} p_1\left[V_d\right] = -\frac{1}{3}d^3 + \frac{4}{3}d.$$

В частности при $d=4$ имеем $\sigma\left(K_3\right) = -16$ и $c_1\left(V_d\right) = (-d+4)\, a = 0$, т.е. $w_2\left(V_d\right) = 0$.

Задача. Доказать, что K_3 - односвязна.

Можно доказать, что форма пересечений $L_{K_3} = (-E_8) \oplus (-E_8) \oplus U \oplus U \oplus U$ (см. обозначения в лекции 2).