Топология 4-мерных многообразий. Лекция 7

П.Е. Пушкарь, А.С. Шмелёв

March 30, 1998

- Теорема Смейла об h-кобордизме.
- Приём Уитни.

Теорема Смейла об h-кобордизме. *Пусть $\left(W^{n+1}, M_0^n, M_1^n\right)$ есть h-кобордизм. Если $\pi_1\left(W^{n+1}\right) = 0$ и $n \geq 5$, то $W^{n+1} \approx M_0^n \times I$, $I = [0,1]$.*

Замечание. Теорема об h-кобордизме справедлива в категориях **PL** и **DIFF**. Мы рассмотрим только **PL**-вариант. Доказательство гладкого варианта см. в книге Дж. Милнор. Теорема об h-кобордизме.

Определение. Разложением на ручки замкнутого **PL**-многообразия M^n называется разложение $M^n = H_0 \cup H_1 \cup \ldots \cup H_k$, где $H_0 = D^n$ - шар (ручка индекса 0), $H_{i+1} = H_{i+1}^p$ - ручка индекса p на многообразии $W_i = \bigcup_{j \leq i} H_j$, т.е. $H_{i+1} = D^p \times D^{n-p}$ и задано вложение $\varphi : \partial D^p \times D^{n-p} \to \partial W_i$. Аналогично определяется разложение кобордизма $\left(W^{n+1}, M_0^n, M_1^n\right)$ на ручки, как разложение $W^{n+1} = M_0^n \times I \cup H_0 \cup \ldots \cup H_k \cup M_1^n \times I$.

Можно показать, что любое **PL**-многообразие или кобордизм допускает разложение на ручки. (Это неверно для **TOP**-многообразий.)

Для доказательства теоремы об h-кобордизме рассмотрим несколько операций с разложениями на ручки.

Операция 1 (перегруппировка ручек). Если $W = W' \cup H^r \cup H^s$, $\dim W = n+1$, и $s \leq r$, то $W \approx W' \cup H^s \cup H^r$ с непересекающимися H^s и H^r. Это вытекает из того, что размерность нижней сферы $S^{s-1} = \partial D^s$ ручки H^s меньше чем коразмерность верхней сферы $S^{n-r} = \partial D^{n-r+1}$ ручки H^r в $\partial\left(W' \cup H^r\right) \setminus M_0$ и, следовательно, можно построить такую изотопию приклеивающего отображения ручки H^s, после которой ручки H^s и H^r станут непересекающимися.

Операция 2 (сложение ручек). Пусть $W^{n+1} = W' \cup H^{r-1} \cup H_1^r \cup H_2^r$, $r \geq 2$, $n+1 \geq r+2$. Если $\partial\left(W' \cup H^{r-1}\right) \setminus M_0$ - односвязно, то существует новое разложение на ручки $W^{n+1} = W' \cup H^{r-1} \cup H_1^r \cup H_3^r$, такое, что

$$\varepsilon\left(H_3^r, H^{r-1}\right) = \varepsilon\left(H_2^r, H^{r-1}\right) \pm \varepsilon\left(H_1^r, H^{r-1}\right)$$

где $\varepsilon\left(H_i^r, H^{r-1}\right)$ - коэффициент инцидентности ручек H_i^r и H^{r-1}, т.е. индекс пересечения нижней сферы ручки H_i^r с верхней сферой ручки H^{r-1} в $\partial\left(W' \cup H^{r-1}\right) \setminus M_0$. Поскольку $\partial\left(W' \cup H^{r-1}\right) \setminus M_0$ - односвязно, то приклеивающему отображению r-ручки однозначно соответствует некоторый элемент группы $\pi_{r-1}\left(\left(W' \cup H^{r-1}\right) \backslash M_0\right)$. Новая ручка H_3^r получается приклейкой по отображению гомотопический класс которого есть сумма (разность) гомотопических классов приклеивающих отображений ручек H_2^r и H_1^r. Из условий на размерность кобордизма и индекс ручек вытекает, что это приклеивающее отображение изотопно приклеивающему отображению ручки H_2^r в $\partial\left(W' \cup H^{r-1} \cup H_1^r\right) \backslash M_0$.

Операция 3 (геометрическое сокращение и введение ручек).

Определение. Ручки H^r и H^{r+1} в $W^{n+1} = W' \cup H^r \cup H^{r+1}$ называются дополнительными, если верхняя сфера S^{n-r} ручки H^r пересекается с нижней сферой S^r ручки H^{r+1} (в $\partial\left(W' \cup H^r\right) \backslash M_0$) в единственной точке (тогда $\varepsilon\left(H^{r+1}, H^r\right) = \pm 1$).

Если ручки H^r и H^{r+1} дополнительны в $W^{n+1} = W' \cup H^r \cup H^{r+1}$, то их объединение $H^r \cup H^{r+1}$ изоморфно шару. Следовательно, существует изоморфизм $W \to W'$ тождественный вне некоторой окрестности объединения $H^r \cup H^{r+1}$. Обратно, если $W = W' \cup_\varphi D^{n+1}$, где $\varphi : D^n \to \partial W' \backslash M_0$ - некоторое вложение южного полушария сферы $S^n = \partial D^{n+1}$, то существует разложение $W = W' \cup H^r \cup H^{r+1}$, где ручки H^r и H^{r+1} дополнительны.

Операция 4 (алгебраическое сокращение).

Определение. Ручки H^r и H^{r+1} в $W^{n+1} = W' \cup H^r \cup H^{r+1}$ называются алгебраически дополнительными, если $\varepsilon\left(H^{r+1}, H^r\right) = \pm 1$.

Пусть $M_1 = \partial W' \backslash M_0$ - односвязно, $r \geq 2$, $n - r \geq 3$ (и, следовательно, $n \geq 5$). Если ручки H^r и H^{r+1} - алгебраически дополнительны, то существует изоморфизм $W \to W'$ тождественный вне некоторой окрестности объединения $H^r \cup H^{r+1}$.

Операция 4, в отличие от операции 3, содержит размерностные ограничения и доказательство последнего изоморфизма опирается на так называемый приём Уитни, который состоит в следующем.

Лемма Уитни. *Пусть M^m - односвязное ориентированное многообразие, P^p и Q^q - его ориентированные подмногообразия дополнительных размерностей, $p + q = n$. Пусть P^p и Q^q трансверсально пересекаются, и пусть $x, y \in P^p \cap Q^q$ - точки с противоположными индексами пересечения $(P \circ Q)_x = -(P \circ Q)_y$. Если выполнено одно из следующих условий*

1. $p \geq 3$, $q \geq 3$, $\pi_1(M) = 0$
2. $p = 2$, $q \geq 3$, $\pi_1(M \backslash Q) = 0$,

то существует изотопия многообразия M^m, переводящая P в P', причём, P' и Q - трансверсально пересекаются и $P' \cap Q = P \cap Q \backslash \{x, y\}$. Более того, носитель этой изотопии лежит в компактном множестве, не содержащем других точек пересечения. ▶

Используя приём Уитни при соответствующих размерностных ограничениях геометрическое пересечение подмногообразий можно свести к минимуму, определяемому алгебраическим индексом пересечения. Однако приём Уитни не работает в случае $p = q = 2$, $n = 4$. В этом состоит причина неудачи с доказательством теоремы об h-кобордизме в размерности

$n = 4$. Как с этим можно бороться мы обсудим позже, а сейчас рассмотрим доказательство теоремы об h-кобордизме при $n \geq 5$.

Используя операцию перегруппировки ручек можно считать, что кобордизм W^{n+1} обладает следующим разложением на ручки

$$W^{n+1} = M_0 \times I \cup \left(\bigcup_{i_0=1}^{a_0} H^0_{i_0} \right) \cup \left(\bigcup_{i_1=1}^{a_1} H^1_{i_1} \right) \cup \ldots \cup \left(\bigcup_{i_{n+1}=1}^{a_{n+1}} H^{n+1}_{i_{n+1}} \right) \cup M_1 \times I,$$

где ручки одного индекса не пересекаются. Так как W^{n+1} - связно, то каждая 0-ручка дополнительна некоторой 1-ручке. Следовательно, $a_1 \geq a_0$ и используя операцию сокращения дополнительных ручек получаем новое разложение кобордизма W^{n+1} на ручки, в котором $a_0 = 0$.

Сокращение 0-ручек соответствует сокращению $n+1$-ручек в двойственном разложении кобордизма W^{n+1}, в котором роль p-ручек играют $n-p+1$-ручки исходного разложения. Следовательно, можно считать, что в разложении кобордизма W^{n+1} на ручки $a_0 = 0$ и $a_{n+1} = 0$.

Далее предположим, что

$$\pi_1 \left(W^{n+1}, M_0 \right) = \pi_1 \left(M_0 \times I \cup \left(\bigcup_{i=1}^{a_1} H^1_i \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{a_2} H^2_j \right), M_0 \right) = 0$$

и будем считать, что $n \geq 4$. Тогда для каждой 1-ручки H^1_i найдётся 2-ручка H^2_j, такая, что $\varepsilon \left(H^2_j, H^1_i \right) = \pm 1$. Рассмотрим в односвязном многообразии $M^n_2 = \partial \left(M_0 \times I \cup \left(\bigcup H^1_i \right) \right) \setminus M_0$ пару подмногообразий: P^{n-1} - верхняя сфера ручки H^1_i и Q^1 - нижняя сфера ручки H^2_j. Индекс пересечения $P \circ Q = \pm 1$. Пусть x и y - две соседние в Q^1 точки пересечения. Поскольку $n \geq 4$, то найдётся вложенный диск D^2, такой, что $\partial D^2 = a \cup b$, где a и b - дуги в Q^1 и P^{n-1}, соответственно, соединяющие точки x и y и не содержащие других точек пересечения, причём, $int \left(D^2 \right) \cap \left(P^{n-1} \cup Q^1 \right) = \emptyset$. Изотопия подмногообразия Q^1 вдоль диска D^2 сокращает пару точек пересечения x и y, не добавляя новых. Повторяя эту процедуру конечное число раз придём к ситуации, когда P^{n-1} и Q^1 пересекаются в единственной точке, т.е. когда ручки H^1_i и H^2_j - дополнительны. Сократим их и повторим эту процедуру до тех пор, пока не сократятся все 1-ручки. Таким образом, используя двойственное разложение, можно считать, что $a_0 = a_1 = a_n = a_{n+1} = 0$.

Далее будем использовать приём Уитни. Предположим, что вложения $M_i \to W^{n+1}$, $i = 0, 1$ являются гомотопическими эквивалентностями (по условию теоремы (W, M_0, M_1) есть h-кобордизм). Предположим, что в разложении кобордизма W^{n+1} на ручки уже исключены все ручки индекса $< s$, где $2 \leq s \leq n-3$ (тогда $n \geq 5$). Покажем, что можно исключить все ручки индекса s.

Пусть H^s - произвольная ручка индекса s и пусть $n_i = \varepsilon \left(H^{s+1}_i, H^s \right)$. Используя операцию сложения ручек (индекса $s+1$) уменьшим сумму $\sum_i |n_i|$. Пусть, например, $|n_1| \geq |n_2| > 0$ (хотя бы одно $|n_i| > 0$, т.к. $H_* (W, M_0) =$

0). Тогда заменив соответствующую пару ручек парой с коэффициентами инцидентности n_2 и $n_2 \pm n_1$ мы уменьшим сумму. В конечном итоге только одно из чисел n_i будет отлично от нуля, и т.к. $H_s(W, M_0) = 0$, то это число $n_i = \pm 1$. Следовательно ручки H^s и H_i^{s+1} алгебраически дополнительны и могут быть сокращены (многообразие $M_s = \partial\left(M_0 \times I \cup \left(\bigcup_{i=1}^{a_s} H_i^s\right)\right) \backslash M_0$ - односвязно).

В итоге у нас остались только $(n-2)$-ручки и $(n-1)$-ручки. В двойственном разложении кобордизма W^{n+1} мы имеем только 2-ручки и 3-ручки. Рассмотрим соответствующий клеточный комплекс пары (W, M_1)

$$0 \to C_3(W, M_1) \xrightarrow{\partial} C_2(W, M_1) \to 0.$$

Поскольку $H_*(W, M_1) = 0$, то ∂ есть изоморфизм и, следовательно, число 2-ручек и 3-ручек в данном разложении совпадает и существует такой базис в $C_3(W, M_1)$ и в $C_2(W, M_1)$, что ∂ задаётся единичной матрицей. Это означает, что при помощи операции сложения 3-ручек можно прийти к такому разложению, в котором ручки разбиты на пары $\left(H_i^3, H_i^2\right)$, такие, что $\varepsilon\left(H_i^3, H_i^2\right) = \pm 1$ и ручки из разных пар не пересекаются. Сокращая приёмом Уитни ручки каждой пары приходим к разложению кобордизма W^{n+1} в котором ручки вообще отсутствуют. Следовательно, $W^{n+1} \approx M_0 \times I$. ▶

В случае размерности $n = 4$ и односвязного кобордизма по-прежнему можно устранить 0-, 1-, 4- и 5-ручки и получить разложение

$$W^5 = M_0 \times I \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k_1} H_i^2\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{k_2} H_j^3\right) \cup M_1 \times I.$$

Если $\left(W^5, M_0, M_1\right)$ есть h-кобордизм, то $k_1 = k_2$, однако, приём Уитни здесь не работает и ручки нельзя уничтожить попарно.

Задача. Пусть M^n - замкнутое многообразие гомотопически эквивалентное сфере S^n, $n \geq 5$. Доказать, что M^n гомеоморфно сфере S^n [*обобщённая гипотеза Пуанкаре*].(Указание при $n = 5$: для односвязного h-кобордизма $\left(W^5, M_0, M_1\right)$ имеет место гомеоморфизм $W^5 \backslash M_1 \approx M_0 \times [0, 1)$.)