Топология 4-мерных многообразий. Лекция 8

П.Е. Пушкарь, А.С. Шмелёв

April 1, 1998

- Лемма Уитни.
- Ручки Кассона.
- Теорема Фридмана и приём Уитни в размерности 4.
- Теорема о 5-мерном топологическом h-кобордизме.
- Классификация односвязных замкнутых топологических 4-мерных многообразий.

Лемма Уитни. *Пусть M^m - односвязное ориентированное многообразие, P^p и Q^q - его ориентированные подмногообразия дополнительных размерностей, $p+q=n$. Пусть P^p и Q^q трансверсально пересекаются, и пусть $x, y \in P^p \cap Q^q$ - точки с противоположными индексами пересечения $(P \circ Q)_x = -(P \circ Q)_y$. Если выполнено одно из следующих условий*

1. $p \geq 3$, $q \geq 3$, $\pi_1(M) = 0$
2. $p = 2$, $q \geq 3$, $\pi_1(M \backslash Q) = 0$,

то существует изотопия многообразия M^m, переводящая P в P', причём, P' и Q - трансверсально пересекаются и $P' \cap Q = P \cap Q \backslash \{x, y\}$. Более того, носитель этой изотопии лежит в компактном множестве, не содержащем других точек пересечения.

Набросок доказательства. Соединим точки x и y в P и Q кривыми α и β соответственно, не проходящими через остальные точки пересечения. Покажем, что существует вложенный двумерный диск $D^2 \subset M^m$, такой, что $\partial D^2 = \alpha \cup \beta$, $D^2 \cap (P \cup Q) = \partial D^2$. Такой диск D^2 называется диском Уитни. Действительно, если $p \geq 3$, то в силу условия $\pi_1(M) = 0$ существует такое отображение $f : D^2 \to M$, что $f(\partial D^2) = \alpha \cup \beta$. Приводя его в общее положение, получаем требуемый диск. Случай $p = 2$ рассматривается аналогично.

Рассмотрим регулярную окрестность (N, B_1, B_2) диска D^2 в (M, P, Q). Поскольку индекс пересечения P и Q в точках x и y имеет противоположные знаки, то зацепление $\partial(N, B_1, B_2) = (S^{m-1}, S^{p-1}, S^{q-1})$ является тривиальным (задача). Следовательно, существует такой шар $B_1' \subset N$, что $\partial B_1' = S^{p-1}$, $B_1' \cap B_2 = \emptyset$ и существует изотопия шара N, неподвижная на

$\partial N = S^{m-1}$ и переводящая B_1 в B_1'. Продолжая её тождественно на всё M получаем требуемую изотопию. ▶

Теорема Уитни несправедлива в размерности $m = 4$, $p = 2$, $q = 2$. В этом случае можно найти лишь погруженный диск $f : D^2 \to M^4$, такой, что $f\left(\partial D^2\right) = \alpha \cup \beta$ и $D^2 \cap (P \cup Q) = \partial D^2 \cup \{x_1, \ldots, x_k\}$, где $x_1, \ldots, x_k$ - точки трансверсального пересечения $f\left(D^2\right)$ с $P \cup Q$. Не устранив эти точки трансверсального пересечения и точки самопересечения $f\left(D^2\right)$, нельзя говорить о существовании изотопии.

Кассон в 1973г. предложил для преодоления этих трудностей одну бесконечную конструкцию, которая позволяет выгнать все точки пересечения на "бесконечность". В итоге получаются нужные результаты, но лишь с точностью до собственного гомотопического типа.

Теорема Кассона. *Пусть $\left(W^4, \partial W^4\right)$ - односвязное гладкое 4-мерное многообразие с краем и $f_i : \left(D^2, \partial D^2\right) \to \left(W^4, \partial W^4\right)$, $i = 1, \ldots, n$ - такие отображения диска, что $f_i \mid_{\partial D^2} : \partial D^2 \to \partial W^4$ - вложения с непересекающимися образами. Предположим, что все индексы пересечений образов $f_i \circ f_j = 0$ (они определены при $i \neq j$) и что существуют такие классы гомологий $\beta_i \in H_2\left(W^4; \mathbb{Z}\right)$ с чётными самопересечениями $\beta_i \circ \beta_i$, для которых $\beta_i \circ f_j = \delta_{ij}$. Тогда найдутся такие непересекающиеся открытые подмножества $V_i \subset W^4$, $i = 1, \ldots, n$, что:*

1. *пара $\left(V_i, V_i \cap \partial W^4\right)$ имеет собственный гомотопический тип пары $\left(D^2 \times \mathbb{R}^2, S^1 \times \mathbb{R}^2\right)$;*
2. *пересечение $V_i \cap \partial W^4$ является открытой трубчатой окрестностью образа $f_i\left(\partial D^2\right) \subset \partial W^4$;*
3. *отображение f_i гомотопно $\mathrm{rel}\partial D^2$ отображению в V_i.*

Определение. Многообразия V_i называются ручками Кассона.

Доказательство теоремы Кассона мы обсудим позже, а сейчас получим следующее важное следствие.

Следствие 1. *Пусть W^4 - гладкое односвязное 4-мерное многообразие и $\alpha, \beta \in H_2\left(W^4; \mathbb{Z}\right)$ таковы, что $\alpha \circ \alpha = \beta \circ \beta = 0$ и $\alpha \circ \beta = 1$. Тогда существует открытое подмножество $V \subset W^4$, имеющее собственный гомотопический тип $S^2 \times S^2 \setminus pt$ и такое, что классы α, β принадлежат образу гомоморфизма вложения $H_2(V; \mathbb{Z}) \to H_2\left(W^4; \mathbb{Z}\right)$.*

Доказательство. Представим классы гомологий α, β погружениями $f, g : S^2 \to \mathrm{int}W^4$ в общем положении (это можно сделать по теореме Гуревича). Выберем 4-мерный диск $D^4 \in int\left(W^4\right)$, являющийся регулярной окрестностью точки положительного трансверсального пересечения $f\left(S^2\right)$ и $g\left(S^2\right)$. Вырезая его, получим многообразие с краем $\left(W^4 \setminus D^4, \partial D^4\right)$ и отображения $f_0, g_0 : \left(D^2, \partial D^2\right) \to \left(W^4 \setminus D^4, \partial D^4\right)$, соответствующие классам гомологий $\alpha, \beta \in H_2\left(W^4 \setminus D^4, \partial D^4; \mathbb{Z}\right) = H_2\left(W^4 \setminus D^4; \mathbb{Z}\right) = H_2\left(W^4; \mathbb{Z}\right)$. Очевидно, что $f_0 \circ g_0 = \alpha \circ \beta - 1 = 0$, $\alpha \circ \alpha = \beta \circ \beta = 0$, $f_0 \circ \beta = \alpha \circ \beta = 1$, $g_0 \circ \alpha = \beta \circ \alpha = 1$, $f_0 \circ \alpha = \alpha \circ \alpha = 0$, $g_0 \circ \beta = \beta \circ \beta = 0$. Применяя теорему

Кассона к отображениям f_0, g_0 получаем открытые непересекающиеся подмножества V_1 и V_2 и положим $V = D^4 \cup V_1 \cup V_2$. ▶

Если бы ручки Кассона V_1 и V_2 были диффеоморфны стандартным открытым 2-ручкам, то построенное подмногообразие V было бы диффеоморфно многообразию $S^2 \times S^2 \setminus pt$ и можно было бы производить приём Уитни, сокращая оставшиеся 2- и 3-ручки на 5-мерном h-кобордизме. В 1981г. Фридман доказал, что ручки Кассона гомеоморфны стандартным открытым 2-ручкам. Доказательство теоремы Фридмана весьма сложно технически и мы не будем его разбирать.

Теорема Фридмана. *Для любой ручки Кассона $CH = \left(V, V \cap \partial W^4\right)$ существует гомеоморфизм пар со стандартной открытой 2-ручкой $H^2 = \left(D^2 \times \mathbb{R}^2, \partial D^2 \times \mathbb{R}^2\right)$.* ▶

Следствие 2. *Пусть W^4 - гладкое односвязное 4-мерное многообразие и $\alpha, \beta \in H_2\left(W^4; \mathbb{Z}\right)$ таковы, что $\alpha \circ \alpha = \beta \circ \beta = 0$, $\alpha \circ \beta = 1$. Тогда существует открытое подмножество $V \subset W^4$ гомеоморфное $S^2 \times S^2 \setminus pt$ и такое, что классы α, β принадлежат образу гомоморфизма вложения $H_2\left(V; \mathbb{Z}\right) \to H_2\left(W^4; \mathbb{Z}\right)$.*

Доказательство. Утверждение вытекает из следствия 1 и теоремы Фридмана. ▶

Таким образом заработал топологический приём Уитни в размерности 4 и, следовательно, стандартными методами сокращения ручек можно получить теорему о 5-мерном топологическом h-кобордизме.

Теорема. *Пусть $\left(W^5, M_0^4, M_1^4\right)$ - гладкий h-кобордизм и $\pi_1\left(W^5\right) = 0$. Тогда W^5 гомеоморфно $M_0^4 \times I$, $I = [0, 1]$.*

Доказательство. Имеет место следующее разложение на ручки

$$W^5 = M_0 \times I \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} H_i^2\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} H_i^3\right) \cup M_1 \times I$$

где ручки разбиты на пары $\left(H_i^3, H_i^2\right)$, такие, что $\varepsilon\left(H_i^3, H_j^2\right) = \delta_{ij}$. Пусть

$$M_2 = \partial\left(M_0 \times I \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} H_i^2\right)\right) \setminus M_0.$$

Тогда M_2 - гладкое односвязное 4-мерное многообразие, группа гомологий $H_2\left(M_2; \mathbb{Z}\right)$ у которого имеет базис циклов α_i, β_i, $i = 1, \ldots, k$, где α_i - верхняя сфера ручки H_i^2, β_i - нижняя сфера ручки H_i^3. Индексы пересечений $\alpha_i \circ \alpha_j = \beta_i \circ \beta_j = 0$, $\alpha_i \circ \beta_j = \delta_{ij}$. По следствию 2 существует открытое подмножество V_1, гомеоморфное $S^2 \times S^2 \setminus pt$, содержащее вложенные сферы α_1 и β_1, трансверсально пересекающиеся в единственной точке. Многообразие M_2 при этом разлагается в связную сумму $M_2 = M_2' \# \left(S^2 \times S^2\right)$, где M_2' - односвязное многообразие, группа гомологий $H_2\left(M_2'; \mathbb{Z}\right)$ у которого имеет базис циклов α_i, β_i, $i = 2, \ldots, k$. Следовательно, ручки H_1^2 и H_1^3 являются дополнительными и могут быть сокращены. Далее по индукции сокращаем все остальные пары ручек. ▶

Следствие. *Пусть M_0^4 и M_1^4 - гладкие замкнутые односвязные 4-мерные многообразия с изоморфными формами пересечений. Тогда они гомеоморфны.*

Доказательство. По теоремам Понтрягина-Уайтхеда и Новикова-Уолла эти многообразия h-кобордантны и, следовательно, по теореме о 5-мерном топологическом h-кобордизме они гомеоморфны. ▶

Теорема об h-кобордизме имеет некомпактный вариант.

Теорема. *Пусть $\left(W^5, M_0^4, M_1^4\right)$ - гладкий односвязный h-кобордизм, причём W^5 - односвязно на бесконечности. Если множество $C = \partial W^5 \setminus (M_0 \cup M_1)$ непусто, предположим дополнительно, что оно уже обладает гладкой структурой прямого произведения, $C = (C \cap M_0) \times I$. Тогда W^5 гомеоморфно $M_0 \times I$, причём этот гомеоморфизм продолжает структуру произведения на C.* ▶

Теорема (Фридман). *Для заданной целочисленной унимодулярной квадратичной формы L существует замкнутое односвязное 4-мерное топологическое многообразие M^4, реализующее L в качестве формы пересечений.*

Для доказательства теоремы Фридмана нам понадобятся следующие два утверждения.

Лемма 1. *Каждая 3-мерная гомологическая сфера является краем стягиваемого топологического 4-мерного многообразия.*

Теорема Милнора. *Для любой целочисленной унимодулярной квадратичной формы L существует такое гладкое 4-мерное многообразие N^4 с краем, что:*

1. *N^4 - односвязно;*
2. *форма пересечений многообразия N^4 есть L;*
3. *край ∂N^4 является трёхмерной гомологической сферой.*

Лемму 1 мы оставляем без доказательства, а теорема Милнора будет доказана позже.

Доказательство теоремы Фридмана. По теореме Милнора можно построить гладкое односвязное многообразие N^4, краем которого является 3-мерная гомологическая сфера Σ, а форма пересечений $L_N = L$. По лемме 1 существует такое стягиваемое компактное топологическое многообразие P, что $\partial P = \Sigma$. Положим $M = N \cup_\Sigma P$. Так как P - стягиваемо, то из точной последовательности Майера-Виеториса следует, что $L_M = L_N \oplus L_P = L_N = L$. Односвязность M вытекает из теоремы ван Кампена. Действительно, $\pi_1(M) = \pi_1(N) *_{\pi_1(\Sigma)} \pi_1(P) = 0 *_{\pi_1(\Sigma)} 0 = 0$. ▶

Следствие. *Существует замкнутое односвязное 4-мерное спинорное топологическое многообразие с формой пересечений E_8. Его сигнатура равна 8 и, следовательно, по теореме Рохлина, это многообразие не сглаживаемо.*

Доказательство. По теореме Фридмана существует замкнутое односвязное 4-мерное топологическое многообразие с формой пересечений E_8.

Поскольку форма пересечений имеет тип II (является чётной), то гомологический характеристический класс можно выбрать нулевым. Следовательно, класс Штифеля-Уитни w_2, двойственный по Пуанкаре приведению по модулю 2 характеристического гомологического класса, является нулевым. ▶

Теорема (Фридман). *Если форма пересечений L имеет тип II, то любые два замкнутые односвязные 4-мерные топологические многообразия с формой пересечений L гомеоморфны. Если форма пересечений L имеет тип I, то существует ровно два негомеоморфных замкнутых односвязных 4-мерных топологических многообразия с формой пересечений L. Для одного из этих многообразий M произведение $M \times S^1$ - сглаживаемо, а для другого - несглаживаемо.* ▶

Две последние теоремы Фридмана дают классификацию замкнутых односвязных 4-мерных топологических многообразий.

Следствие (топологическая 4-мерная гипотеза Пуанкаре). *Топологическое 4-мерное многообразие гомотопически эквивалентное S^4 гомеоморфно S^4.* ▶