Семестр 2
14.05.98

Экзамен по алгебре

1. a) Докажите, что любое неприводимое представление 3-мерной алгебры $\mathfrak{A}$ над $\mathbb{C}$ одномерно;

b) Опишите все 2-мерные и 3-мерные алгебры над $\mathbb{C}$ с точностью до изоморфизма.

2. Опишите все неприводимые представления симметрических групп $\mathfrak{S}_3, \mathfrak{S}_4$ над $\mathbb{C}$.

3. Идеал $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{A}$ в алгебре над полем $\mathfrak{k}$ называется *нильпотентным*, если $\exists N$ т.ч. $\forall a_1, \dots, a_N \in \mathfrak{I}$ имеем $a_1 \dots a_N = 0$.

a) Докажите, что если $\mathfrak{A} \cong \bigoplus \mathrm{Mat}_{n_i}(\mathfrak{k})$ (т.е. $\mathfrak{A}$ *полупроста*), то в $\mathfrak{A}$ нет двусторонних нильпотентных идеалов, кроме нулевого;

b) Предположим, что $p = \mathrm{char}\mathfrak{k}$ делит порядок конечной группы $\mathfrak{G}$. Докажите, что групповая алгебра $\mathfrak{k}[\mathfrak{G}]$ не полупроста;

c) Пусть $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{k}[\mathfrak{G}]$ — *идеал аугментации*, т.е. множество элементов $\sum_{g \in \mathfrak{G}} c_g g \in \mathfrak{k}[\mathfrak{G}]$ таких, что $\sum_{g \in \mathfrak{G}} c_g = 0$. Докажите, что если $\sharp\mathfrak{G} = p^n$, то $\mathfrak{I}$ нильпотентен.

4. a) Докажите, что в любой конечномерной $\mathfrak{k}$-алгебре $\mathfrak{A}$ существует максимальный двусторонний нильпотентный (т.е. содержащий любой другой такой) идеал $\mathfrak{R}$ (*радикал Джекобсона*);

b) Найдите радикалы групповых алгебр симметрических групп $\overline{\mathbb{F}}_3[\mathfrak{S}_3]$ и $\overline{\mathbb{F}}_3[\mathfrak{S}_4]$.

5. Докажите, что радикал $\mathfrak{R}$ $\mathfrak{k}$-алгебры $\mathfrak{A}$ равен пересечению ядер всех сюръекций $\mathfrak{A} \twoheadrightarrow \mathrm{Mat}_n(\mathfrak{k})$.

6. Группа $GL_2(\mathbb{F}_p)$ действует на “плоскости Лобачевского” $\mathbb{F}_{p^2} - \mathbb{F}_p$ так: матрица $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ переводит $z \in \mathbb{F}_{p^2} - \mathbb{F}_p$ в $\frac{az+b}{cz+d}$. Получается представление $GL_2(\mathbb{F}_p)$ в пространстве комплекснозначных функций $V = \mathbb{C}[\mathbb{F}_{p^2} - \mathbb{F}_p]$. Найдите $\dim \mathrm{End}_{GL_2(\mathbb{F}_p)}(V)$.

7. Группа $GL_4(\mathbb{F}_p)$ действует на множествах Gr(1,4), Gr(2,4) прямых (соответственно, плоскостей) в 4-мерном векторном пространстве над $\mathbb{F}_p$. Получаются представления $GL_4(\mathbb{F}_p)$ в пространствах комплекснозначных функций $V = \mathbb{C}[\mathrm{Gr}(1,4)]$, $W = \mathbb{C}[\mathrm{Gr}(2,4)]$.

a) Разложите на неприводимые представление $GL_4(\mathbb{F}_p)$ в V;

b) Найдите $\dim \mathrm{Hom}_{GL_4(\mathbb{F}_p)}(V, W)$;

c) Докажите, что W разлагается в сумму 3 неприводимых представлений, и найдите их размерности;

d) Фиксируем прямую $l \in \mathrm{Gr}(1,4)$. *Пучком* $P(l) \subset \mathrm{Gr}(2,4)$ называется множество плоскостей, содержащих данную прямую. Пусть $U \subset W$ — подпространство, состоящее из функций f таких, что $\sum_{s \in P(l)} f(s) = 0$ $\forall l \in \mathrm{Gr}(1,4)$. Докажите, что U — неприводимое подпредставление W.

8. Для ненулевого комплексного числа q определим *алгебру Гекке* $\mathfrak{H}_q$ с образующими T_1, T_2 и соотношениями $T_i^2 = (q-1)T_i + q,\ T_1T_2T_1 = T_2T_1T_2$.

a) Докажите, что $\dim \mathfrak{H}_q = 6$;

b) Докажите, что при $q = 1$ алгебра $\mathfrak{H}_q$ изоморфна групповой алгебре $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_3]$;

c) Докажите, что $\mathfrak{H}_q$ полупроста, если $q^6 \neq 1$;

d) Докажите, что $\mathfrak{H}_q \cong \mathbb{C}[\mathfrak{S}_3]$, если $q^6 \neq 1$;

e) Найдите радикал алгебры $\mathfrak{H}_{\sqrt[3]{1}}$.

Все задачи решены полностью — 5; 6 задач решены полностью — 4; 4 задачи решены полностью — 3. Пересдача осенью. Удачи!