Семестр 2
11.05.98

Экзамен по арифметике

1. Пусть $\operatorname{tg} x = \sum_{n=1}^{\infty} T_n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$.

a) Докажите, что $T_n = 2^{2n}(2^{2n}-1)\frac{|B_{2n}|}{2n}$;

b) Докажите, что T_n — натуральные числа.

2. Вычислите $\pm\sqrt{-1}$ в $\mathbb{Q}_{13}$ с четырьмя знаками.

3. Рассмотрим формальный ряд $G(b,t) := 1 + \binom{t}{1}b + \ldots + \binom{t}{n}b^n + \ldots$. Докажите, что $G(-8,\frac{1}{2})$ сходится в $\mathbb{Q}_2$ и вычислите $G(-8,\frac{1}{2})^2$.

4. Какие 5-адические числа представляет форма $2x^2+5y^2$?

5. Какие из форм $x^2-2y^2+5z^2,\ x^2-y^2+10z^2,\ 3x^2-y^2+30z^2$ эквивалентны между собой над $\mathbb{Q}$?

6. a) Задайте образующими и соотношениями тело кватернионов над $\mathbb{Q}$, которое остается кватернионами в точности в точках 2,3,5,7;

b) Задайте образующими и соотношениями тело кватернионов над $\mathbf{F}_3(t)$, которое остается кватернионами в точности в точках t^2+1 и $t+1$.

7. a) Задайте образующими и соотношениями какое-нибудь 16-мерное тело над $\mathbb{Q}(i)$;

b) Что происходит с этим телом во всевозможных точках поля $\mathbb{Q}(i)$ (остается ли телом, становится ли матрицами, матрицами над кватернионами)?

8. Вычислите класс алгебры Клиффорда $\mathrm{Cl}(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)$ в $\mathrm{Br}(\mathbb{Q})$.

9. Найдите все единицы поля $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.

10. Найдите дискриминант поля $K=\mathbb{Q}(\theta),\ \theta^3-18\theta-6=0$.

8 задач — 5, 6 задач — 4, 4 задачи — 3. Пересдача по договоренности. Удачи!