Задачи по арифметике к 12 февраля 1998

1. Найдите p-адическое разложение для a) $\dots 1246 \times \dots 6003$ в $\mathbf{Q}_7$ с четырьмя знаками; b) $\dots 1323^{-1}$ в $\mathbf{Q}_5$ с четырьмя знаками; c) $900 - \dots 312,3$ в $\mathbf{Q}_{11}$ с четырьмя знаками; d) $\frac{2}{3}$ в $\mathbf{Q}_2$; e) $-\frac{1}{6}$ в $\mathbf{Q}_7$; f) $\frac{1}{10}$ в $\mathbf{Q}_{11}$; g) $-\frac{9}{16}$ в $\mathbf{Q}_{13}$; h) $\frac{1}{1000}$ в $\mathbf{Q}_5$; i) 720 в $\mathbf{Q}_3$; j) $\frac{1}{6}$ в $\mathbf{Q}_3$; k) $\frac{1}{24}$ в $\mathbf{Q}_2$; l) $\frac{1}{120}$ в $\mathbf{Q}_5$.

2. Докажите, что p-адическая запись числа $a \in \mathbf{Q}_p$ имеет конечное число знаков до запятой тогда и только тогда, когда a является положительным рациональным числом со знаменателем, равным степени числа p.

3. Докажите, что p-адическая запись числа $a \in \mathbf{Q}_p$ периодична начиная с некоторого места налево тогда и только тогда, когда $a \in \mathbf{Q}$.

4. Вычислите $\pm\sqrt{-1}$ в $\mathbf{Q}_{13}$ с четырьмя знаками.

5. Вычислите все четыре $\sqrt[4]{1}$ в $\mathbf{Q}_5$ с четырьмя знаками.

6. Какие из следующих 11-адических чисел имеют квадратные корни в $\mathbf{Q}_{11}$? a) 5; b) 7; c) -7; d) 1935; e) 703,63; f) 7036,3; g) 11^7; h) $7 - 600$; i) $\dots 9876543210,05$.

7. Найдите область сходимости рядов a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},\ x \in \mathbf{Q}_p$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n},\ x \in \mathbf{Q}_p$.

8. Докажите, что поле p-адических чисел не имеет нетривиальных автоморфизмов.

9. *Представители Тейхмюллера.* Пусть $a \in \mathbf{Z}_p$. Докажите, что $a^{p^n} \equiv a^{p^{n-1}} \pmod{p^n}$ для всех $n = 1, 2, 3, \dots$. Таким образом, последовательность (a^{p^n}) сходится в $\mathbf{Z}_p$ к некоторому числу t. Докажите, что $t^p = t$ и $t \equiv a \pmod p$. Так получаются все p корней уравнения $x^p - x = 0$ в $\mathbf{Q}_p$.

10. Прямоугольник разрезан на треугольники одинаковой площади. Докажите, что их число четно.

Задачи по арифметике к 19 февраля 1998

1. Для натурального числа m обозначим через N_m целую часть $(1+\sqrt{3})^{2m+1}$. Докажите, что $\|N_m\|_2 = 2^{-m-1}$.

2. Пусть $S_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + \dots + (n-1)^k$, а B_k — k-е число Бернулли ($k \geq 4$ четно). Для простого $p > 3$ докажите $\|p^{-m} S_k(p^m) - B_k\|_p \leq p^{-2m+\varepsilon}$ при $m \geq 1$, где $\varepsilon = 1$, если $p-1$ делит $k-2$, и $\varepsilon = 0$ иначе.

3. Докажите, что найдутся целые 7-адические числа x, y, z все не делящиеся на 7, такие, что $x^7 + y^7 = z^7$.

4. Докажите, что при любом p уравнение $x^2 + 2y^4 - 17z^4 = 0$ имеет ненулевые решения в $\mathbf{Z}_p$. Напомним, что в прошлом семестре была задача, согласно которой это уравнение не имеет целых (ненулевых) решений.

5. Докажите, что при любом p следующие полиномы имеют нули в $\mathbf{Z}_p$: a) $(x^2-2)(x^2-17)(x^2-34)$; b) $(x^3-37)(x^2+3)$.

6. Определим число сочетаний $\binom{t}{n}$ для переменной t и натурального n как $\binom{t}{n} := \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!}$. Докажите

a) для $s, t \in \mathbf{Q}_p$ имеем $\binom{s+t}{n} = \sum_{j=0}^{n} \binom{s}{j}\binom{t}{n-j}$;

b) если $t \in \mathbf{Z}_p$, то $\binom{t}{n} \in \mathbf{Z}_p$;

c) ряд $G(b,t) := 1 + \binom{t}{1}b + \dots + \binom{t}{n}b^n + \dots$ сходится для $t \in \mathbf{Z}_p,\ b \in p\mathbf{Z}_p$;

d) если $s \in \mathbf{Z}_p$, то $G(b,s)G(b,t) = G(b,s+t)$;

e) как продолжить эту функцию на $t \in \mathbf{Q}_p$? Продолжите и докажите, что $G(-8, \frac{1}{2})^2 = -7 \in \mathbf{Q}_2$.

7. Используя формулу для $\zeta(2k)$ и формулу Стирлинга $n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$ (т.е. отношение левой и правой части стремится к 1 при $n \to \infty$), найдите асимптотику $|B_{2k}|$ (обычный модуль) при $k \to \infty$.

Задачи по арифметике к 26 февраля 1998

1. Запишем 2-адические числа a, b в форме $a = 2^\alpha u,\ b = 2^\beta v$, где u, v — 2-адические единицы. Определим гомоморфизмы из группы 2-адических единиц в $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$: $\varepsilon(u) = \frac{u-1}{2} \pmod 2$; $\omega(u) = \frac{u^2-1}{8} \pmod 2$. Докажите, что

a) $(a,b)_2 = (-1)^{\varepsilon(u)\varepsilon(v) + \alpha\omega(v) + \beta\omega(u)}$;

b) Билинейная форма $\mathbf{Q}_2^*/(\mathbf{Q}_2^*)^2 \times \mathbf{Q}_2^*/(\mathbf{Q}_2^*)^2 \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} = \{\pm 1\}$, $\langle a, b\rangle = (a,b)_2$ невырождена и в базисе $2, -1, 5$ имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. a) Вычислите группу $\mathbf{F}_p((t))^*/(\mathbf{F}_p((t))^*)^2$;

b) Вычислите билинейную форму со значениями в $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} = \{\pm 1\}$, задаваемую символом Гильберта на этой группе.

3. Докажите, что функцию $\log(x)$, заданную обычным рядом Тэйлора при $\|x-1\|_p < 1$ (см. задачу 7b к 12 февраля) и условием $\log(p) = 0$, можно однозначно продолжить до непрерывной функции на $\mathbf{Q}_p^*$ так, чтобы $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.

4. Пусть a_n — максимальная степень 2, делящая числитель (несократимой записи) рационального числа $2 + 2^2/2 + 2^3/3 + 2^4/4 + \ldots + 2^n/n$. Докажите, что $a_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Оцените скорость роста a_n.

5. Проверьте следующее доказательство иррациональности π. Пусть $\pi = a/b$, а $p \neq 2$ — простое число, не делящее a. Тогда $0 = \sin(pb\pi) = \sin(pa) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(pa)^{2n+1}/(2n+1)! \equiv pa \pmod{p^2}$, что невозможно.

6. Проверьте следующее доказательство трансцендентности e. Если e алгебраично, то и $e-1$ тоже алгебраично. Возьмем простое $p \neq 2$, не делящее ни числитель, ни знаменатель никакого коэффициента минимальных многочленов e и $e-1$ над $\mathbf{Q}$. Тогда $\|e\|_p = \|e-1\|_p = 1$. Поэтому $1 = \|e-1\|_p^p = \|(e-1)^p\|_p = \|e^p - 1 - \sum_{i=1}^{p-1}\binom{p}{i}(-e)^i\|_p$. В последней сумме все биномиальные коэффициенты делятся на p, а $\|-e\|_p = 1$. Следовательно, $1 = \|e^p - 1\|_p = \|\sum_{n=1}^{\infty} p^n/n!\|_p$, что невозможно, так как каждое слагаемое в данной сумме имеет норму меньше 1.

7. Докажите следующее равенство в $\mathbf{Q}_3$: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{2n}}{n4^{2n}} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n}}{n4^n}$.

Задачи по арифметике к 5 марта 1998

1. Докажите, что если форма $x^2 - \alpha y^2$ над полем K представляет элементы γ и β, то она представляет и $\gamma\beta$.

2. Докажите, что над конечным полем $\mathbf{F}_q$ характеристики $\neq 2$ всякая квадратичная форма от n переменных с определителем $d \neq 0$ эквивалентна форме $x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + dx_n^2$. Таким образом, две невырожденные формы от n переменных с определителями d_1, d_2 эквивалентны тогда и только тогда, когда $d_1 d_2^{-1} \in (\mathbf{F}_q^*)^2$.

3. Пусть $p \neq 2$. Докажите, что группа Витта $W(\mathbf{F}_p)$ равна $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$, если $p = 4k+3$, и $W(\mathbf{F}_p) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, если $p = 4k+1$.

4. Докажите, что в группе Витта $W(K)$ порядок любого элемента равен 2 тогда и только тогда, когда $-1 \in (K^*)^2$.

5. Рассмотрим степенной ряд $G(b,t)$ для функции $(1+b)^t$ из задачи 6 к 19 февраля. Докажите, что а) $G(-\frac{p}{p+1}, -n)$ (где n — натуральное число) сходится к одному и тому же натуральному числу в $\mathbf{Q}_p$ и $\mathbf{R}$;

b) $G(\frac{p^2+2mp}{m^2}, \frac{1}{2})$ (где $m > p(1+\sqrt{2})$ — натуральное число, не делящееся на p) сходится к одному и тому же рациональному числу в $\mathbf{Q}_p$ и $\mathbf{R}$;

c) $G(\frac{p}{n^2}, \frac{1}{2})$ (где $p \geq 7$, а $n = \frac{p-1}{2}$) сходится к разным числам в $\mathbf{Q}_p$ и $\mathbf{R}$.

6. а) Приведите пример бесконечной суммы ненулевых рациональных чисел, которая сходится по норме $\|\ \|_p$ при всех простых p, а также как сумма вещественных чисел (по норме $|\ |$);

b) Может ли такая сумма сходиться к некоторому рациональному числу по какой-нибудь из норм $|\ |$, $\|\ \|_p$? По всем нормам?

7. Докажите, что для любого натурального k p-адическое число $\sum_{n=0}^{\infty} n^k p^n$ лежит в $\mathbf{Q}$.

Задачи по арифметике к 19 марта 1998

1. При каких p форма $2x^2 - 15y^2 + 14z^2$ не представляет нуля в $\mathbf{Q}_p$?

2. Какие 5-адические числа представляет форма $2x^2 + 5y^2$?

3. Докажите, что группа Витта p-адических полей имеет следующий вид:

a) $W(\mathbf{Q}_2) = \mathbf{Z}/8\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$;

b) $W(\mathbf{Q}_p) = \mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$, если $p = 4k+3$;

c) $W(\mathbf{Q}_p) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, если $p = 4k+1$.

4. Найдите критерий эквивалентности квадратичных форм над $\mathbf{F}_p((t))$, аналогичный критерию для $\mathbf{Q}_p$, и вычислите группу Витта $W(\mathbf{F}_p((t)))$.

5. а) Пусть $h(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 - xyz(x+y+z) - (x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)$. Докажите, что если хоть одно из $x, y, z \in \mathbf{Z}_2$ не делится на 2, то $h(x,y,z) \equiv 1 \pmod 4$;

b) Положим $g(x_1,\ldots,x_9)=h(x_1,x_2,x_3)+h(x_4,x_5,x_6)+h(x_7,x_8,x_9)$, $\Phi(x_1,\ldots,x_{18})=g(x_1,\ldots,x_9)+4g(x_{10},\ldots,x_{18})$. Докажите, что над полем $\mathbf{Q}_2$ если $\Phi(x_1,\ldots,x_{18})=0$, то $x_1=\ldots=x_{18}=0$.

Это контрпример к гипотезе Э.Артина о том, что однородный многочлен степени d от $\geq 1+d^2$ переменных над $\mathbf{Q}_p$ имеет нетривиальные нули. Для $d=1,2,3$ эта гипотеза верна.

6. Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$ — однородный многочлен степени r над полем $\mathbf{Q}_p$, $p\neq 2$, с целыми p-адическими коэффициентами, обладающий следующим свойством: $f(x_1,\ldots,x_n)\equiv 1 \pmod{p^{m+1}}$, если все x_i целые и хоть один x_i не делится на p. Докажите, что r делится на $(p-1)p^m$.

Задачи по арифметике к 26 марта 1998

1. Пусть $a,b,c\in\mathbf{Z}$ — попарно взаимно простые числа, свободные от квадратов, не все одного знака. Докажите, что форма $ax^2+by^2+cz^2$ представляет нуль над $\mathbf{Q}$ тогда и только тогда, когда разрешимы все три следующие сравнения: $t^2\equiv -bc \pmod a$, $u^2\equiv -ca \pmod b$, $v^2\equiv -ab \pmod c$ (теорема Лежандра).

2. Представляют ли нуль в $\mathbf{Q}$ формы a) $3x^2+5y^2-7z^2$; b) $3x^2-5y^2-7z^2$?

3. Какие простые целые рациональные числа представляются формами a) x^2+y^2; b) x^2+5y^2; c) x^2-5y^2?

4. Какие рациональные числа представляются формами a) $2x^2-5y^2$; b) $2x^2-6y^2+15z^2$?

5. При каких целых рациональных a форма $x^2+2y^2-az^2$ представляет нуль в $\mathbf{Q}$?

6. Найдите все рациональные решения уравнения $x^2+y^2-2z^2=0$.

7. Какие из форм $x^2-2y^2+5z^2$, $x^2-y^2+10z^2$, $3x^2-y^2+30z^2$ эквивалентны между собой над $\mathbf{Q}$?

8. Вычислите группу Витта $W(\mathbf{Q})$.

Задачи по арифметике к 2 апреля 1998

1. Докажите, что нормирования (точнее, их классы эквивалентности) на $\mathbf{F}_q(t)$ исчерпываются нормированием $\|P(t)\|_\infty=q^{\deg P}$ ($P(t)\in\mathbf{F}_q[t]$) и нормированиями, нумеруемыми простыми идеалами кольца $\mathbf{F}_q[t]$ (т.е. унитарными неприводимыми многочленами над $\mathbf{F}_q$).

2. Задайте образующими и соотношениями тело кватернионов над $\mathbf{Q}$, которое остается кватернионами в точности над следующими полями: a) $\mathbf{Q}_2$ и $\mathbf{Q}_3$; b) $\mathbf{Q}_3$ и $\mathbf{R}$; c) $\mathbf{Q}_2,\mathbf{Q}_3,\mathbf{Q}_5,\mathbf{Q}_7$.

3. Задайте образующими и соотношениями тело кватернионов a) над $\mathbf{F}_3(t)$, которое остается кватернионами в точности в точках a) 0 и ∞; b) t^2+1 и $t+1$; c) над $\mathbf{F}_9(t)$, которое остается кватернионами в точности в точках $\pm\sqrt{-1}$.

4. Докажите, что ручной символ удовлетворяет соотношению Стейнберга $\{a,1-a\}=1\ \forall a\in\mathbf{F}_q((t))$.

5. Придумайте (т.е. задайте образующими и соотношениями) какое-нибудь 9-мерное тело над a) $\mathbf{Q}_7$; b) $\mathbf{F}_7((t))$.

Задачи по арифметике к 9 апреля 1998

1. Докажите, что классы изоморфизма 4-мерных тел над $\mathbf{F}_q(t)$ нумеруются произвольными четными наборами *точек* (т.е. классов эквивалентности нормирований) $\mathbf{F}_q(t)$, над которыми тела остаются телами (т.е. *не расщепляются*).

2. Докажите, что соотношение $\{x,y\}=\{y,x\}^{-1}$ в группе $K_2(F)$ для произвольного поля F формально вытекает из билинейности и соотношения Стейнберга $\{x,1-x\}=1$.

3. Вычислите группу $K_2(\mathbf{F}_q)$.

4. Пусть Q — симметричная билинейная форма на четномерном пространстве V над полем K, $\mathrm{char} K\neq 2$. Зададим алгебру Клиффорда $\mathrm{Cl}(Q)$ образующими $v\in V$ и соотношениями $uv+vu=2Q(u,v)\cdot 1$. Докажите, что $\mathrm{Cl}(Q)$ — центральная простая алгебра размерности $2^{\dim V}$ над K.

5. Пусть H — симметричная билинейная форма ранга 2, представляющая нуль. Докажите, что $\mathrm{Cl}(H)=\mathrm{Mat}_2(K)$. Пусть $W^+(K)$ — подгруппа группы Витта, состоящая из (классов) форм четного ранга. Задает ли отображение $Q\mapsto \mathrm{Cl}(Q)$ гомоморфизм $W^+(K)\to \mathrm{Br}(K)$?

6. Вычислите класс $\mathrm{Cl}(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)$ в a) $\mathrm{Br}(\mathbf{Q}_2)$; b) $\mathrm{Br}(\mathbf{Q}_3)$; c) $\mathrm{Br}(\mathbf{Q}_5)$; d) $\mathrm{Br}(\mathbf{R})$.

Задачи по арифметике к 16 апреля 1998

1. Сколько точек поля $\mathbf{F}_q(t)$ имеют поле вычетов $\mathbf{F}_{q^n}$?

2. a) Известно, что пополнение поля $\mathbf{F}_2(t)$ в точке $x = t^2+t+1$ изоморфно полю $\mathbf{F}_4((z))$. Найдите в явном виде $\sqrt[3]{1}$ в $\widehat{\mathbf{F}_2(t)}_x$ (как предел некоторой конкретной фундаментальной последовательности); b) Найдите в явном виде $i \in \mathbf{R}\widehat{(t)}_{t^2+1} \cong \mathbf{C}((z))$.

3. Пусть $\mathrm{char}\mathbf{F}_q \neq 2$, x — точка поля $\mathbf{F}_q(t)$, и $\{,\}_x : \ K_2(\mathbf{F}_q(t)) \to \mathbf{F}_x^*$ — отображение ручного символа. Докажите, что $\oplus_{x\neq\infty}\{,\}_x : \ K_2(\mathbf{F}_q(t)) \to \oplus_{x\neq\infty}\mathbf{F}_x^*$ — изоморфизм. Таким образом, $K_2(\mathbf{F}_q(t)) \subset \oplus\mathbf{F}_x^*$ — подгруппа, задаваемая уравнением взаимности А.Вейля.

4. a) Докажите, что если $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$ — два неизоморфных тела кватернионов над $\mathbf{Q}$, то $\mathbf{H}_1 \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{H}_2 \cong \mathrm{Mat}_2(\mathbf{H}_3)$ для некоторого тела кватернионов $\mathbf{H}_3$ над $\mathbf{Q}$. Вычислите класс изоморфизма $\mathbf{H}_3$. Таким образом, всевозможные кватернионы образуют подгруппу $\mathrm{Br}_2(\mathbf{Q}) \subset \mathrm{Br}(\mathbf{Q})$. b) Докажите то же самое для $\mathbf{F}_q(t)$.

5. Докажите, что $K_2(\mathbf{C})$ несчетна.

Задачи по арифметике к 30 апреля 1998

1. Постройте выпуклое ограниченное центрально симметричное тело объема ровно 2^n, не содержащее никаких точек стандартной решетки, за исключением начала координат.

2. Пусть $x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_t, z_1, \ldots, z_t$ — координаты в $\mathbf{R}^{s+2t}$. Пусть тело X задано неравенством $|x_1| + \ldots + |x_s| + 2\sqrt{y_1^2+z_1^2} + \ldots + 2\sqrt{y_t^2+z_t^2} < a$. Докажите, что $\mathrm{vol}X = 2^s(\frac{\pi}{2})^t\frac{a^n}{n!}$. Докажите, что X выпукло.

3. Пусть $c_1, \ldots, c_n$ — вещественные положительные числа, и (a_{ij}) — вещественная обратимая $n \times n$-матрица. Докажите, что если $c_1 \ldots c_n > |\det(a_{ij})|$, то найдутся целые рациональные числа $x_1, \ldots, x_n$, не все равные нулю, такие что $|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j| < c_i$, $1 \leq i \leq n$.

4. Пусть a_{ij}, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq n$, — целые рациональные числа, и m_i, $1 \leq i \leq k$, — натуральные числа. Докажите, что множество целых точек $(x_1, \ldots, x_n)$ в $\mathbf{R}^n$ таких, что $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \equiv 0 \pmod{m_i}$, $1 \leq i \leq k$, образует полную решетку кообъема не больше $m_1 \ldots m_k$.

5. Пусть a, b, c — ненулевые целые рациональные числа, попарно взаимно простые и свободные от квадратов, и пусть $|abc| = 2^\lambda p_1 \ldots p_s$, где p_i — нечетные простые числа, а $\lambda = 0, 1$. Предположим, что форма $ax^2 + by^2 + cz^2$ представляет нуль во всех полях p-адических чисел.

a) Докажите, что тогда найдутся целочисленные линейные формы $L_1, \ldots, L_s, L', L''$ от трех переменных такие, что для целых u, v, w будет выполняться сравнение $au^2+bv^2+cw^2 \equiv 0 \pmod{4|abc|}$ при условии $L_i(u,v,w) \equiv 0 \pmod{p_i}$, $1 \leq i \leq s$; $L'(u,v,w) \equiv 0 \pmod{2^{1+\lambda}}$; $L''(u,v,w) \equiv 0 \pmod{2}$.

b) Обозначим через M решетку целых точек $(u,v,w) \in \mathbf{R}^3$, удовлетворяющих вышеприведенным сравнениям. В силу Задачи 4, ее кообъем не превосходит $4|abc|$. Пусть $X \subset \mathbf{R}^3$ — эллипсоид, заданный неравенством $|a|x^2 + |b|y^2 + |c|z^2 < 4|abc|$. Докажите, что $\mathrm{vol}X = \frac{32}{3}\pi|abc|$. Выведите из Леммы Минковского, что форма $ax^2 + by^2 + cz^2$ представляет нуль над $\mathbf{Q}$.

Задачи по арифметике к 7 мая 1998

1. Пусть K — числовое поле степени $n = s+2t$ над $\mathbf{Q}$, с дискриминантом D. Теорема Минковского утверждает, что найдется целое $0 \neq \alpha \in \mathcal{O}(K)$ такое, что $|N_{K/\mathbf{Q}}(\alpha)| \leq (\frac{2}{\pi})^t\sqrt{|D|}$. Пользуясь Задачей 2 к 30 апреля, докажите следующее усиление этой теоремы: найдется целое $0 \neq \alpha \in \mathcal{O}(K)$ такое, что $|N_{K/\mathbf{Q}}(\alpha)| \leq (\frac{4}{\pi})^t\frac{n!}{n^n}\sqrt{|D|}$.

2. Пользуясь формулой Стирлинга $n! = \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n\exp(\frac{\theta}{12n})$, $0 < \theta < 1$, докажите, что $|D| > (\frac{\pi}{4})^{2t}\frac{1}{2\pi n}\exp(2n - \frac{1}{6n})$.

3. Докажите, что существует лишь конечное число полей алгебраических чисел с заданным значением дискриминанта. (Указание: докажите, что найдется целое примитивное число в поле K, минимальное уравнение которого имеет коэффициенты, ограниченные некоторой функцией дискриминанта.)

4. Рассмотрим три поля $K_i = \mathbf{Q}(\theta_i)$, $\theta_1^3 - 18\theta_1 - 6 = 0$; $\theta_2^3 - 36\theta_2 - 78 = 0$; $\theta_3^3 - 54\theta_3 - 150 = 0$.

a) Докажите, что $1, \theta_i, \theta_i^2$ образуют базис кольца целых $\mathcal{O}(K_i)$;

b) Докажите, что дискриминант $D(K_i) = 23 \cdot 2^2 \cdot 3^5 = 22356$;

c) Докажите, что все поля K_1, K_2, K_3 различны. (Указание: посмотрите, как разлагаются числа 5 и 11 в наших полях.)

5. Докажите, что кубическое поле K (т.е. $[K:\mathbf{Q}] = 3$) является чисто кубическим (т.е. $K = \mathbf{Q}(\sqrt[3]{m})$) тогда и только тогда, когда $D(K) = -3d^2$ для некоторого целого d.

6. Пусть a, b, c, d — свободные от квадратов попарно взаимно простые натуральные числа > 1, одно из которых делится на 3.

a) Докажите, что чисто кубические поля $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{abc^2d^2})$ и $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{acb^2d^2})$ различны, но имеют один и тот же дискриминант $D = -27a^2b^2c^2d^2$;

b) Докажите, что для любого натурального n можно указать n различных чисто кубических полей с одним и тем же дискриминантом.

7. а) Докажите, что $5 + 2\sqrt{6}$ является основной единицей поля $\mathbf{Q}(\sqrt{6})$;

b) Найдите все единицы поля $\mathbf{Q}(\sqrt{3})$;

Найдите основную единицу поля c) $\mathbf{Q}(\sqrt{19})$; d) $\mathbf{Q}(\sqrt{37})$.

8. Докажите, что a) в поле $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})$ всякая единица имеет вид $\pm(1-\sqrt[3]{2})^k$; b) в поле $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{6})$ основной единицей является $1 - 6\sqrt[3]{6} + 3\sqrt[3]{6}^2$.

9. Найдите все целочисленные решения уравнения $3x^2 - 4y^2 = 11$.