Функции многих переменных

Лекции С.М. Натанзона для студентов 1 курса МК НМУ

Весенний семестр 1998

§1 Топология $\mathbb{R}^n$.

Точка $x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$. Расстояние между точками $d(x_1, x_2) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_1^i - x_2^i)^2}$

Роль интервала играют открытые шары $B(a,\delta) = \{x \in \mathbb{R}^n | d(a,x) < \delta\}$

Определение. Множество $G \subset \mathbb{R}^n$ называется открытым, если $\forall(x \in G)\ \exists(\delta > 0)$: $B(x,\delta) \subset G$.

Пример 1.1.

1. Любой брусок $G = (a^1, b^1, \dots, a^n, b^n) = \{x = (x^1, \dots, x^n) | a^i < x^i < b^i\}$
2. Любой шар $B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n | d(a,x) < r\}$
3. Внешность шара $\{x \in \mathbb{R}^n | d(a,x) > r\}$

Теорема 1.1. 1) Объединение любого числа открытых множеств открыто.
2) Пересечение конечного числа открытых множеств открыто.

Док-во. 1)Пусть G_α открыто. $a \in \bigcup\limits_\alpha G_\alpha$, тогда $a \in G_{\alpha_0} \Rightarrow \exists(\delta) : B(a,\delta) \in G_{\alpha_0} \subset \bigcup\limits_\alpha G_\alpha$.
2) Пусть $G_1, \dots, G_n$ открыты. $a \in \bigcap\limits_i G_i$, $B(a, \delta_i) \subset G_i \Rightarrow B(a, \min(\delta_1, \dots, \delta_n)) \subset \bigcap\limits_i G_i$. □

Пример 1.2. $\bigcap\limits_{\delta>0} B(a,\delta) = a$ — не открыто.

Определение. Открытое множество, содержащее точку, называется окрестностью точки.

Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество.

Определение. 1) $x \in E$ называется внутренней, если она имеет окрестность $x \in B \subset E$
2) $x \in \mathbb{R}^n$ называется внешней для E, если она внутренняя для $\mathbb{R}^n \setminus E$
3) $x \in \mathbb{R}^n$ называется границей E, если она не внешняя и не внутренняя. Обозначается ∂E.

Пример 1.3. $\partial B(a,\delta) = \{x \in \mathbb{R}^n | d(a,x) = r\} \subset \mathbb{R}^n$

Определение. Множество $F \subset \mathbb{R}^n$ называется замкнутым, если его дополнение $\mathbb{R}^n \setminus F$ — открыто.

Пример 1.4. 1) $\overline{B}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n | d(a,x) \leqslant r\}$ — замкнутый шар.

2) Замкнутый брус $F(a^1, b^1, \dots, a^n, b^n) = \{x \in \mathbb{R}^n | a^i \leqslant x \leqslant b^i\}$

Задача 1.1. Может ли множество быть одновременно открытым и замкнутым?

Задача 1.2. Доказать, что 1) пересечение любого числа замкнутых множеств замкнуто. 2) Объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто. 3) Верно ли это для любого числа замкнутых множеств?

Определение. Точка $x \in \mathbb{R}^n$ называется предельной для $E \subset \mathbb{R}^n$, если любая окрестность x в $\mathbb{R}^n$ содержит <u>бесконечное</u> число точек из E.

Определение. Объединение E и его предельных точек называется замыканием E и обозначается $\overline{E}$.

Пример 1.5. Замыканием открытого шара $B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n | d(a,x) < r\}$ является замкнутый шар $\overline{B}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n | d(a,x) \leqslant r\}$

Теорема 1.2. Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ замкнуто, если и только если его замыкание совпадает с ним самим.

Док-во. 1) Пусть F — замкнуто, тогда $\mathbb{R}^n \setminus F$ открыто. То есть любая точка $x \in \mathbb{R}^n$ имеет окрестность, лежащую в $\mathbb{R}^n \setminus F$ и, значит, не содержит точек F. Таким образом x не предельна для F. То есть все предельные точки F лежат в F и $\overline{F} = F$.

2) Пусть теперь $\overline{F} = F$. Тогда любая точка $x \in \mathbb{R}^n \setminus F = \mathbb{R}^n \setminus \overline{F}$ — не является предельной. То есть имеет окрестность, содержащую лишь конечное число точек из F, но тогда x имеет окрестность, не содержащую точек из F. То есть $\mathbb{R}^n \setminus F$ — открыто, а F — замкнуто. □

§2 Компакты в $\mathbb{R}^n$.

Определение. Множество $K \subset \mathbb{R}^n$ называется компактом, если из любого покрытия K открытыми множествами: $K \subset \bigcup\limits_\alpha G_\alpha$ можно выбрать конечное подпокрытие $K \subset G_{\alpha_1} \cup \dots \cup G_{\alpha_n}$

Лемма-пример 2.1. Замкнутый брус $F(a^1, b^1, \dots, a^n, b^n) = \{x \in \mathbb{R}^n | a^i \leqslant x \leqslant b^i\}$ является компактом.

Док-во. Пусть из покрытия $F \subset \bigcup\limits_i^\infty G_{\alpha_i}$ нельзя выбрать конечного подпокрытия. Разобьем каждую сторону F пополам и получим 2^n брусов. Хотя бы один из них не покрывается конечным подмножеством G_α. Назовем его F_1. Разделив каждую сторону F_1 пополам, получим 2^n брусов, среди них F_2 не покрывается конечным числом G_α. Продолжая, найдем $F \supset F_1 \supset F_2 \supset \dots$ Их пересечение имеет общую точку $\bigcap\limits_i F_i = x \in F$. Она содержится в каком-то G_α. Но G_α — открыто, значит $\exists(\delta > 0) : B(x, \delta) \subset G_\alpha$. Тогда при $\frac{1}{2^i} < 2\delta$ имеем $F_i \subset B(x, \delta) \subset G_\alpha$, что противоречит выбору F_i. □

Лемма 2.2. Компакт замкнут.

Док-во. Пусть K — компакт и $a \notin K$. Для каждой $x \in K$ существует окрестность $x \in G(x) = B(x, \rho_x)$ такая, что $a \notin G(x)$. Из покрытия $K \subset \bigcup\limits_{x \in K} G(x)$ выберем конечное покрытие $K \subset G(x_1) \bigcup \dots \bigcup G(x_m)$. Положим $\delta_i = d(a, x_i) - \rho_{x_i}$ и $\delta < \min\limits_i \delta_i$. Тогда $B(a, \delta) \bigcap G(x_i) = \emptyset$. Следовательно $B(a, \delta) \bigcap K \subset B(a, \delta) \bigcap (\bigcup\limits_i G(x_i)) = \bigcup\limits_i (B(a, \delta) \bigcap G(x_i)) = \emptyset$. То есть a — не предельная точка. Значит все предельные точки лежат в K. То есть $\overline{K} = K$. □

Лемма 2.3. Пусть $F \subset \mathbb{R}^n$ замкнуто и $F \subset K$, где K — компакт. Тогда F — компакт.

Док-во. Пусть $F \subset \bigcup\limits_\alpha G_\alpha$ — произвольное покрытие F открытыми множествами и $G = \mathbb{R}^n \setminus F$. Тогда $K \subset G \bigcup (\bigcup\limits_\alpha G_\alpha)$ — покрытие компакта открытыми множествами. Выделим конечное подпокрытие $F \subset K \subset G \bigcup G_{\alpha_1} \bigcup \dots \bigcup G_{\alpha_m}$, но $G \bigcap F = \emptyset$, откуда $F \subset G_{\alpha_1} \bigcup \dots \bigcup G_{\alpha_m}$ □

Определение. Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется ограниченным, если $E \subset B(a, r)$ для некоторых a, r.

Лемма 2.4. Компакт ограничен.

Док-во. Пусть K — компакт. Рассмотрим последовательность открытых шаров $B_n = B(0, n)$. Тогда $K \subset \mathbb{R}^n \subset \bigcup\limits_n B_n$. Выделим теперь открытое подпокрытие $K \subset B_N$. □

Теорема 2.1. Множество $K \subset \mathbb{R}^n$ является компактом, если и только если K ограничено и замкнуто.

Док-во. Если K — компакт, то согласно леммам 2.2 и 2.4 K — ограниченно и замкнуто. Если K — ограниченно, то оно лежит в некотором замкнутом брусе $K \subset I = I(a^1, b^1, \dots, a^n, b^n)$. согласно лемме 2.1, I — компакт. Значит, если K — замкнуто, то согласно лемме 2.3 K — компакт. □

Определение. Говорят, что последовательность $x_1, \dots, x_n, \dots$ имеет предел x, если $\forall(\varepsilon > 0) \exists N \forall(n > N) d(x_n, x) < \varepsilon$, т.е. $x_n \in B(x, \varepsilon)$.

Задача 2.1. Докажите, что K — компакт, если и только если из любой последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Определение. Последовательность $x_1, x_2, \dots \in \mathbb{R}^n$ называется последовательностью Коши, если $\forall(\varepsilon > 0) \exists(N) \forall(n_1, n_2 > N) : d(x_{n_1}, x_{n_2}) < \varepsilon$.

Задача 2.2. Докажите, что последовательность является последовательностью Коши тогда и только тогда, когда она сходится.

§3 Непрерывность функций.

Определение. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Отображение $f : E \to \mathbb{R}^m$ называется непрерывным на E в x_0, если $\forall(\varepsilon > 0)\exists(\delta > 0)\forall(x \in B(x_0, \delta) \cap E) : f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon)$.

Теорема 3.1. Суперпозиция непрерывных функций непрерывна.

Док-во. Пусть $f : E \to \mathbb{R}^m$ непрерывна в $x_0 \in E$ и $g : f(E) \to \mathbb{R}^k$ непрерывна в $f(x_0)$. Возьмем $\varepsilon > 0$. Тогда непрерывность g дает $\exists(\delta_1 > 0)\forall(f(x) \in B(f(x_0), \delta_1) \cap f(E)) : g(f(x)) \in B(g(f(x_0)), \varepsilon)$. Непрерывность f дает $\exists(\delta_2 > 0)\forall(x \in B(x_0, \delta_2) \cap E) : f(x) \in B(f(x_0), \delta_1)$. Таким образом $\forall(x \in B(x_0, \delta_2) \cap E) : g(f(x)) \in B(g(f(x_0)), \varepsilon)$. А это и означает непрерывность $g \circ f$ в точке x_0. □

Задача 3.1. Доказать, что $f : E \to \mathbb{R}^n$ непрерывна в $x \in E$ если и только если f переводит любую сходящуюся к x последовательность $\{x_n\} \subset E$ в сходящуюся последовательность.

Задача 3.2. $f : E \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = (f^1(x), \dots, f^n(x))$. Доказать, что f непрерывна $\Leftrightarrow$ все f^i непрерывны.

Теорема 3.2. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в $x_0 \in E$. Тогда $f + g$, $f \cdot g$ – непрерывны, и, если $g(x_0) \neq 0$, то и f/g непрерывна в x_0.

Док-во. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists(\delta_1 > 0)\forall(x \in B(x_0, \delta_1)) : |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $\exists(\delta_2 > 0)\forall(x \in B(x_0, \delta_2)) : |g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Положим $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Тогда $\forall(x \in B(x_0, \delta)) : |(f + g)(x) - (f + g)(x_0)| < \varepsilon$.

Задача 3.3. Доказать остальные утверждения теоремы. □

Функция $f(x_1, x_2)$ может быть непрерывна как функция по x_1 и по x_2 по отдельности, но не быть непрерывной в совокупности.

Пример 3.1.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{при} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{при} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$f(0, y) = f(x, 0) = 0$, но $f(x, x) = \frac{1}{2}$.

Определение. Говорят, что $f : E \to \mathbb{R}^m$ непрерывна на E, если она непрерывна в каждой точке E.

Лемма 3.1. Пусть $f : E \to \mathbb{R}^m$ непрерывна на $E \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ — открыто и $U = \{x \in E | f(x) \in V\} \equiv f^{-1}(V)$. Тогда существует открытое $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ такое, что $U = \tilde{U} \cap E$.

Док-во. Пусть $x \in U$. Тогда $f(x) \in V$. Ввиду открытости V $\exists(\varepsilon_x > 0) : B(f(x), \varepsilon_x) \subset V$. Ввиду непрерывности $f(x)$ $\exists(\delta_x > 0) : f(B(x, \delta_x)) \subset B(f(x), \varepsilon_x) \subset V$. Положим $\tilde{U} = \bigcup\limits_{x \in U} B(x, \delta_x)$. Тогда $\tilde{U} \cap E \supset U$ и $f(\tilde{U} \cap E) \subset \bigcup\limits_{x \in U} B(f(x), \varepsilon_x) \subset V$. То есть $\tilde{U} \cap E \subset U$. Значит $\tilde{U} \cap E = U$. □

Теорема 3.3. Непрерывный образ компакта является компактом.

Док-во. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ — компакт и $f : E \to \mathbb{R}^m$ непрерывна. Рассмотрим произвольное открытое покрытие $\bigcup\limits_{\alpha} V_\alpha \supset f(E)$. Согласно лемме 3.1, существуют открытые $\tilde{U}_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ такие, что $f(\tilde{U}_\alpha \cap E) = V_\alpha$ и $\tilde{U}_\alpha \cap E = \{x \in E | f(x) \in V_\alpha\}$. Отсюда $\bigcup\limits_{\alpha} \tilde{U}_\alpha \supset E$. Выберем конечное покрытие $\tilde{U}_1 \cup \dots \cup \tilde{U}_n \supset E$. Тогда $V_1 \cup \dots \cup V_n \supset f(E)$. □

Следствие 3.1. Функция непрерывная на компакте достигает на нем максимума и минимума.

Док-во. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ — компакт и $f : E \to \mathbb{R}^m$ непрерывна. Согласно теоремам 3.3 и 2.1, множество $f(E)$ — ограниченно и замкнуто. Из ограниченности следует $\exists M = \sup\limits_{x \in E} f(x)$. Пусть $\{x_n\} \subset E$ такая, что $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = M$. Из замкнутости следует, что $M \in f(E)$, то есть $\exists(x \in E) : f(x) = M$. То есть x — точка максимума. Аналогично минимум. □

§4 Дифференциал.

Определение. Пусть $a \in E \subset \mathbb{R}^n$ и $f, g : E \to \mathbb{R}^m$ Мы пишем "$f = \bar{\bar{o}}(g)$ при $x \to a$", если $f(x) = \alpha(x)g(x)$, где $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$, то есть $\forall(\varepsilon > 0)\exists(\delta)\forall(x \in B(a,\delta) \setminus a) : \alpha(x) \in B(0,\varepsilon)$

Определение. Пусть x — предельная точка $E \subset \mathbb{R}^n$ и $f : E \to \mathbb{R}^n$. Функция f называется дифференцируемой в x, если $\exists$ линейный оператор $L(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ такой, что $f(x+h) - f(x) = L(x)h + \bar{\bar{o}}(h)$ при $h \to 0$. Оператор $L(x)$ называется дифференциалом f в x и обозначается $L(x) = df(x)$. Далее, если не оговорено противное, мы считаем, что x — внутренняя точка E. Отображение $f(x) = (f^1(x), \dots, f^m(x))$ описывается координатными функциями $f^i(x)$.

Задача 4.1. Отображение дифференцируемо $\Leftrightarrow$ все ее координатные функции дифференцируемы.

Задача 4.2. Дифференцируемая функция непрерывна (в точке).

Перейдем к вычислению оператора $L(x)$. Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ произвольная функция на $E \subset \mathbb{R}^n$

Определение. Предел

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x^1, \dots, x^n) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x^1, \dots, x^i + h, \dots, x^n) - f(x^1, \dots, x^n)}{h}$$

если он существует называется частной производной f в точке $x = (x^1, \dots, x^n)$ по переменной x^i.

Лемма 4.1. Дифференцируемая в $x \in E$ функция f имеет в x частные производные по всем x^i и $df(x) = (\frac{\partial f}{\partial x^1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(x))$.

Док-во. $f(x^1 + h^1, \dots, x^n + h^n) - f(x^1, \dots, x^n) = df(x)h + \bar{\bar{o}}(h) = \sum\limits_{j=1}^{n} L_j(x)h^j + \bar{\bar{o}}(h)$. В частности $f(x^1, \dots, x^i + h^i, \dots, x^n) - f(x^1, \dots, x^n) = L_i(x)h^i + \bar{\bar{o}}(h^i)$ и $\frac{\partial f}{\partial x^i} = L_i(x)$. □

Теорема 4.1. Пусть $f : E \to \mathbb{R}^m$ дифференцируема в x. Тогда

$$f(x^1 + h^1, \dots, x^n + h^n) - f(x^1, \dots, x^n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f^n}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^n}{\partial x^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h^1 \\ \vdots \\ h^n \end{pmatrix} + \bar{\bar{o}}(|h|)$$

Док-во. сразу следует из леммы 4.1. □

Определение. Матрица $\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f^n}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^n}{\partial x^n} \end{pmatrix}$ называется матрицей Якоби или якобианом f. Согласно теореме 4.1 она описывает df.

Если функция дифференцируема в точке x, то матрица Якоби существует. Но обратное неверно.

Пример 4.1.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{при} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{при} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$f(0,y) = f(x,0) = 0$ и $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Однако, f разрывна в $(0,0)$ и следовательно не дифференцируема (см. задачу 4.2).

§5 Свойства дифференциала.

В этом параграфе $E \subset \mathbb{R}^n$, $f : E \to \mathbb{R}^m$ и $f(x+h) - f(x) = df(x)h + \bar{\bar{o}}(\|h\|)$ определяется только во внутренних точках E.

Теорема 5.1. Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ имеет все частные производные в E и все они непрерывны в $x \in E$. Тогда f — дифференцируема в x.

Док-во. По теореме Лагранжа и непрерывности

$$\begin{aligned}
f(x+h)-f(x) &= f(x^1+h^1,\dots,x^n+h^n)-f(x^1,\dots,x^n)= \\
&= f(x^1+h^1,\dots,x^n+h^n)-f(x^1,x^2+h^2,\dots,x^n+h^n)+f(x^1,x^2+h^2,\dots,x^n+h^n)- \\
&\quad -f(x^1,x^2,x^3+h^3,\dots,x^n+h^n)+\dots-f(x^1,x^2,\dots,x^n)= \\
&= \frac{\partial f}{\partial x^1}(x^1+\theta^1h^1,x^2+h^2,\dots,x^n+h^n)h^1+\frac{\partial f}{\partial x^2}(x^1,x^2+\theta^2h^2,x^3+h^3,\dots,x^n+h^n)h^2+\cdots \\
&\quad +\frac{\partial f}{\partial x^n}(x^1,x^2,\dots,x^n+\theta^nh^n)h^n=\frac{\partial f}{\partial x^1}h^1+\alpha_1h^1+\dots+\frac{\partial f}{\partial x^n}h^n+\alpha_nh^n=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x^i}h^i+\bar{\bar{o}}(\|h\|)
\end{aligned}$$

□

Следствие 5.1. Пусть $f: E\to\mathbb{R}^m$ имеет все частные производные в E и все они непрерывны в $x\in E$. Тогда f — дифференцируема в x.

Теорема 5.2. Если $f_1: E\to\mathbb{R}^m$, $f_2: E\to\mathbb{R}^m$ — дифференцируемы в x, то $\lambda_1f_1+\lambda_2f_2$ тоже дифференцируема в x и $d(\lambda_1f_1+\lambda_2f_2)=\lambda_1df_1+\lambda_2df_2$.

Док-во. $(\lambda_1f_1+\lambda_2f_2)(x+h)-(\lambda_1f_1+\lambda_2f_2)(x)=(\lambda_1(f_1(x+h)-f_1(x))+\lambda_2(f_2(x+h)-f_2(x)))=\lambda_1df_1h+\lambda_2df_2h+\bar{\bar{o}}(\|h\|)$. □

Теорема 5.3. Если $f_1: E\to\mathbb{R}, f_2: E\to\mathbb{R}$ — дифференцируемы в x, то $f_1\cdot f_2$ также дифференцируема в x и $d(f_1\cdot f_2)=f_1df_2+f_2df_1$. Если, кроме того, $f_2(x)\neq 0$, то f_1/f_2 тоже дифференцируема в x и $d(\frac{f_1}{f_2})=\frac{1}{f_2^2}(f_2df_1-f_1df_2)$

Док-во.

$$\begin{aligned}
&(f_1\cdot f_2)(x+h)-(f_1\cdot f_2)(x)=(f_1(x+h)-f_1(x))f_2(x+h)+f_1(x)(f_2(x+h)-f_2(x))= \\
&=(df_1h+\bar{\bar{o}}(\|h\|))(f_2(x)+\bar{\bar{o}}(\|h\|)+df_2h)+(f_1(x)+\bar{\bar{o}}(\|h\|))(df_2h+\bar{\bar{o}}(\|h\|))=(f_1df_2+f_2df_1)h+\bar{\bar{o}}(\|h\|).
\end{aligned}$$

Задача 5.1. Разобрать случай $d(\frac{f_1}{f_2})$. □

Теорема 5.4. Пусть $f: E\to F$ и $g: F\to\mathbb{R}^k$, где $E\subset\mathbb{R}^n, F\subset\mathbb{R}^m$. Тогда, если отображение f дифференцируемо в точке x, а отображение g дифференцируемо в точке $y=f(x)$, то композиция $g\circ f$ дифференцируема в точке x и $d(g\circ f)(x)=dg(y)df(x)$

Док-во.

$$\begin{aligned}
(g\circ f)(x+h)-(g\circ f)(x)&=g(f(x+h))-g(f(x))= \\
&=dg(f(x))(f(x+h)-f(x))+\bar{\bar{o}}(\|f(x+h)-f(x)\|)= \\
&=dg(y)(df(x)h+\bar{\bar{o}}(\|h\|))+\bar{\bar{o}}(\|dfh+\bar{\bar{o}}(\|h\|)\|)=dg(y)df(x)+\bar{\bar{o}}(\|h\|)
\end{aligned}$$

□

Теорема 5.5. Пусть $E,F\subset\mathbb{R}^n$ $f: E\to F$ — взаимнооднозначное отображение и f^{-1} непрерывно в $y=f(x)$. Пусть f — дифференцируемо в $x\in E$ и $df(x)$ — обратимо. Тогда $f^{-1}: F\to E$ дифференцируемо в $y=f(x)$ и $(df^{-1}(y))=(df(x))^{-1}$.

Док-во. Положим $y=f(x)$, $t=f(x+h)-f(x)=f(x+h)-y$. Тогда $f^{-1}(y)=x$, $f^{-1}(y)(y+t)=x+h$ и $h=f^{-1}(y+t)-f^{-1}(y)$. Непрерывность означает, что $t\to 0$ при $h\to 0$ и $h\to 0$ при $t\to 0$. Дифференцируемость дает $t=df(x)h+\bar{\bar{o}}(\|h\|)$, откуда $(df(x))^{-1}t=h+(df(x))^{-1}\bar{\bar{o}}(\|h\|)=h+\bar{\bar{o}}(\|h\|)$. В частности $\exists(\delta>0)\forall(\|h\|<\delta):\|(df(x))^{-1}t\|>\frac{1}{2}\|h\|$, то есть $\|h\|<2\|(df(x))^{-1}t\|<const\|t\|$. Следовательно $(df(x))^{-1}t=h+\bar{\bar{o}}(\|t\|)$. Откуда $f^{-1}(y+t)-f^{-1}(y)=h=(df(x))^{-1}t+\bar{\bar{o}}(\|t\|)$, то есть $df^{-1}(y)=(df(x))^{-1}$. □

§6 Дифференциальное исчисление функций многих переменных. Формула Тейлора.

Теорема 6.1. (Лагранжа) Пусть $G\subset\mathbb{R}^n, f:G\to\mathbb{R}, [x,x+h]\subset G$, f– непрерывна на $[x,x+h]$ и дифференцируема на $(x,x+h)$. Тогда существует точка $\xi\in(x,x+h)$ такая,что $f(x+h)-f(x)=df_{(\xi)}h$.

Док-во. Функция $F(t)=f(x+th)\quad t\in[0,1]$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа. Поэтому $f(x+h)-f(x)=F(1)-F(0)=F'(\theta)$, где $\theta\in(0,1)$. Но $F=f\circ g$, где $g(t)=x+th$ и по теореме 5.4 $F'(\theta)=dF_{(\theta)}=d(f\circ g)_{(\theta)}=df(g(\theta))h=df(x+\theta h)h=df_{(\xi)}h$. □

Определение. Множество $G\in\mathbb{R}^n$ называется (линейно) связным,если любые его точки x_1,x_2 можно соединить путем $l\subset G$, то есть $\exists$ непрерывное отображение $f:[0,1]\to G$ такое, что $f(0)=x_1, f(1)=x_2$.

Теорема 6.2. Если $f:G\to\mathbb{R}$ дифференцируема в связной области G и $df=0$ в каждой точке, то $f=const$.

Док-во. Пусть $x_1,x_2\in G$. Докажем, что $f(x_1)=f(x_2)$. Пусть l–отрезок, соединяющий x_1 и x_2. Покроем его шарами $B_x=B(x,\delta_x)\subset G$, где $x\in l$. Выберем конечное подмножество $B_{\alpha_1},\dots,B_{\alpha_n}$, покрывающее отрезок l. В каждом B_α верно $f(x+h)-f(x)=df_{(\xi)}h=0$, то есть $f|_{B_\alpha}=const$. Отсюда $f|_l=const$. □

Определение. Частной производной порядка k называется

$$\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_2}}\left(\cdots\frac{\partial}{\partial x^{i_k}}f\right)\cdots\right)=\frac{\partial^k f}{\partial x^{i_1}\cdots\partial x^{i_k}}$$

Эта функция n–переменных,зависящая от порядка дифференцирования.

Пример 6.1.

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{при } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{при } (x,y)=(0,0)\end{cases}\quad \text{Тогда } \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=1, \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=-1.$$

Теорема 6.3. Пусть $f:G\to\mathbb{R}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^i}$ существуют на G и непрерывны в $x\in G$. Тогда $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}(x)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^i}(x)$

Док-во. Достаточно рассмотреть f в шаре $B\subset G$ с центром $x=(x^1,x^2)$. Рассмотрим $h=(h^1,h^2)$ такое, что $x+h\in B$. Положим $\varphi(t)=f(x^1+th^1,x^2+h^2)-f(x^1+th^1,x^2)$. Тогда

$$F(h^1,h^2)=f(x^1+h^1,x^2+h^2)-f(x^1+h^1,x^2)-f(x^1,x^2+h^2)+f(x^1,x^2)=\varphi(1)-\varphi(0).$$

По теореме Лагранжа

$$\begin{aligned}F(h^1,h^2)=\varphi'(\theta_1) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(x^1+\theta_1h^1,x^2+h^2)-\frac{\partial f}{\partial x^1}(x^1+\theta_1h^1,x^2)\right)h^1=\\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^1\partial x^2}(x^1+\theta_1h^1,x^2+\theta_2h^2)h^1h^2.\end{aligned}$$

Аналогично

$$F(h^1,h^2)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2\partial x^1}(x^1+\tilde\theta_1h^1,x^2+\tilde\theta_2h^2)h^1h^2.$$

Отсюда

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^1\partial x^2}(x^1+\theta_1h^1,x^2+\theta_2h^2)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2\partial x^1}(x^1+\tilde\theta_1h^1,x^2+\tilde\theta_2h^2).$$

Переходим к пределу при $h\to0$ и по непрерывности получаем: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^1\partial x^2}(x^1,x^2)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2\partial x^1}(x^1,x^2)$. □

Определение. $C^k(G)$–множество всех функций, частные производные которых определены и непрерывны до k-го порядка включительно.

Задача 6.1. Доказать, что если $f \in C^k(G)$, то все частные производные до порядка k включительно не зависят от порядка дифференцирования.

Лемма 6.1. Пусть $f(x) = f(x^1, \dots, x^n) \in C^k(G), [x, x+h] \in G$ и $\varphi(t) = f(x+th)$, где $t \in [0,1]$. Тогда

$$\varphi^{(k)}(0) = \frac{d^k\varphi}{dt^k}(0) = \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x^{i_1}\cdots\partial x^{i_k}}(x) h^{i_1}\cdots h^{i_k}$$

Док-во. Будем доказывать индукцией по k. При $k=1$ используем теорему 5.4(о суперпозиции отображений). Тогда $\varphi = f\circ g$, где $g(t) = x+th$ т.е. $\varphi : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ действует так $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ и

$$\varphi'(0) = d\varphi(0) = df(x)\cdot dg(0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}\cdots\frac{\partial f}{\partial x^n}\right)\cdot\begin{pmatrix} h^1\\ \vdots \\ h^n\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}(x)h^i$$

Пусть теперь утверждение доказано для $k = m-1$. Тогда

$$\varphi^{(m)}(0) = \frac{d}{dt}\varphi^{(m-1)}(0) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i_1\dots i_{m-1}=1}^{n}\frac{\partial^{m-1} f}{\partial x^{i_1}\cdots\partial x^{i_{m-1}}}(x)\cdot h^{i_1}\cdots h^{i_{m-1}}\right) =$$

$$= \sum_{i_1\dots i_{m-1}=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^m f}{\partial x^{i_1}\cdots\partial x^{i_{m-1}}\partial x^i}(x)\cdot h^{i_1}\cdots h^{i_{m-1}}h^i =$$

$$= \sum_{i_1\dots i_m=1}^{n}\frac{\partial^m f}{\partial x^{i_1}\cdots\partial x^{i_m}}(x)\cdot h^{i_1}\cdots h^{i_m}$$

□

Теорема 6.4. (формула Тейлора) Пусть $f(x) = f(x^1,\dots,x^n) \in C^N(G)$ и $[x, x+h] \subset G$. Тогда $f(x+h) - f(x) = f(x^1+h^1,\dots,x^n+h^n) - f(x^1,\dots,x^n) =$

$$= \sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k!}\sum_{i_1\dots i_k=1}^{n}\frac{\partial^k f}{\partial x^{i_1}\cdots\partial x^{i_k}}(x)\cdot h^{i_1}\cdots h^{i_k} + r_N(x,h)$$

, где

$$r_N = \sum_{i_1\cdots i_N=1}^{n}\left(\int_0^1 \frac{(1-t)^{N-1}}{(N-1)!}\frac{\partial^N f}{\partial x^{i_1}\cdots\partial x^{i_N}}(x+th)dt\right)h^{i_1}\cdots h^{i_N} =$$

$$= \frac{1}{N!}\sum_{i_1\dots i_N=1}^{n}\frac{\partial^N f}{\partial x^{i_1}\cdots\partial x^{i_N}}(x+\theta h)\cdot h^{i_1}\cdots h^{i_N} = \bar{\bar{o}}(||h||^N)$$

, где $\theta \in (0,1)$.

Док-во. Применяем обычную формулу Тейлора к $\varphi(t) = f(x+th)$. Тогда $f(x+th) - f(x) = \varphi(1) - \varphi(0) = \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} + r_N$, где $r_N = \int\limits_0^1 \frac{(1-t)^{N-1}}{(N-1)!}\varphi^{(N)}dt = \frac{1}{N!}\varphi^{(N)}(\theta t) = \bar{\bar{o}}(t)$. Используя лемму 6.1, получаем нужный результат. □

§7 График функции.

Формула Тейлора дает представление функции в виде $f(x) = f(x_0) + f_1(x) + \cdots$, где $f_k(x) = f_k(x^1, \ldots, x^n)$ – функция степени k от переменных $(x^1, \ldots, x^n)$. Добавление каждого нового f_k – это более точная аппроксимация f.

График функции f –гиперповерхность $\Gamma = \Gamma_f = \{(x, f(x)\} = \{(x^1, \ldots, x^n, f(x^1, \ldots, x^n))\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Она складывается из графиков функций $f(x_0), f_1, f_2, \cdots$. График функции $f(x_0) + f_1(x) = f(x_0) + \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x^i - x_0^i)$ обозначается T_{x_0}. Таким образом, уравнение плоскости T_{x_0} в координатах $(x^1, \ldots, x^n, z)$ имеет следующий вид: $z = f(x_0) + \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x^i - x_0^i)$

Теорема 7.1. Плоскость T_{x_0} совпадает с касательной плоскостью,то есть состоит из всех точек вида $(x_0, f(x_0)) + v$, где v– касательный вектор к некоторой линии на графике Γ_f в точке $(x_0, f(x_0))$.

Док-во. Если $(x(t), f(x(t)))$–произвольная линия на графике и $x(0) = x_0$, то касательный вектор

$$v = \lim_{t\to 0} \frac{(x(t), f(x(t))) - (x_0, f(x_0))}{t} = \left(\lim_{t\to 0} \frac{x(t) - x(0)}{t}, \lim_{t\to 0} \frac{f(x(t)) - f(x(0))}{t}\right) =$$

$$= \left(\frac{dx^1}{dt}(0), \cdots, \frac{dx^n}{dt}(0), \frac{df(x(t))}{dt}(0)\right)$$

Но, согласно формуле Тейлора

$$\frac{df(x(t))}{dt}(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x(t)) - f(x(0))}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f\Big(x(0) + x'(0)t + \bar{\bar{o}}(t)\Big) - f(x(0))}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x(0))\Big((x^i)'(0)t + \bar{\bar{o}}(t)\Big)\right) + \frac{\bar{\bar{o}}(t)}{t}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)\Big((x^i)'(0)\Big)$$

То есть $v = ((x^1)'(0), \ldots, (x^n)'(0), \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x^i)'(0))$ и $(x_0, f(x_0)) + v$ лежит в плоскости.

$$\{x_0^1 + v^1, \ldots, x_0^n + v^n, \quad f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} \cdot v^i \Big| (v^1, \ldots, v^n) \in \mathbb{R}^n\} =$$

$$= \{x^1, \cdots, x^n, \quad f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^i - x_0^i) \Big| (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n\} = T_{x_0}$$

Обратно, если $(x_0, f(x_0)) + v \in T_{x_0}$, то $v = (v^1, \ldots, v^{n+1})$– касательный вектор к линии $(x_0 + t(v^1, \ldots, v^n), f(x_0 + t(v^1, \ldots, v^n)))$ на графике Γ_f в точке x_0.

Задача 7.1. Доказать это утверждение, используя первую часть доказательства теоремы 7.1. □

Лемма 7.1. Если $f : E \to \mathbb{R}$ имеет в x_0 максимум или минимум и все $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)$ существуют, то $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = 0$

Док-во. Функция $\varphi(x^i) = f(x_0^1, \ldots, x_0^{i-1}, x^i, x_0^{i+1}, \ldots, x_0^n)$ имеет в точке x_0 экстремум, откуда $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = \varphi'(x_0^i) = 0$. □

Согласно формуле Тейлора $f_2(x) = \frac{1}{2} \cdot \sum\limits_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0) \cdot (x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j)$, то есть является квадратичной формой от $h^i = (x^i - x_0^i)$. График $f_2(x)$ зависит от сигнатуры этой формы.

Пример 7.1. Пусть $n = 2$

1. Форма положительно определена. Тогда после линейной замены $f_2(x^1, x^2) = (x^1)^2 + (x^2)^2$. Минимум.

2. Форма отрицательно определена. Тогда после линейной замены $f_2(x^1, x^2) = -(x^1)^2 - (x^2)^2$. Максимум.

3. $f_2(x^1, x^2) = (x^1)^2 - (x^2)^2$. Седло.

Теорема 7.2. Пусть $f : E \to \mathbb{R}, f \in C^2(E)$ и $df_{(x_0)} = 0$. Тогда, если форма $\sum\limits_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} h^i h^j$ положительно (отрицательно) определена в x_0, то f имеет в x_0 минимум (максимум).

Док-во.

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{||h||^2}{2} \left(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0) \frac{h^i h^j}{||h||^2} + \bar{\bar{o}}(1) \right) = \frac{||h||^2}{2} \left(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0) s^i s^j + \bar{\bar{o}}(1) \right)$$

где $(s^1, \ldots, s^n) \in \partial B(0, 1)$. Квадратичная форма на $\partial B(0, 1)$ достигает max или min. Значит, при достаточно малом h скобка имеет определенный знак. □

Задача 7.2. Возможен ли экстремум, если форма принимает как отрицательные, так и положительные значения?

§8 Теорема о неявной функции.

Геометрически объекты можно задавать не только как графики функций. Многие из них – это корни системы

$$\begin{cases} F^1(x^1, \ldots, x^n) = 0 \\ \qquad \ldots \\ F^k(x^1, \ldots, x^n) = 0 \end{cases}$$

Теорема о неявной функции показывает, что множество решений этой системы локально можно трактовать как график некоторого отображения.

Пример 8.1. $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ – Это единичная окружность.

$$\begin{array}{llll} \text{При} & y > 0 & F(x,y) = 0 \ \Leftrightarrow & y = \sqrt{1 - x^2} \\ \text{При} & y < 0 & F(x,y) = 0 \ \Leftrightarrow & y = -\sqrt{1 - x^2} \\ \text{При} & x > 0 & F(x,y) = 0 \ \Leftrightarrow & x = \sqrt{1 - y^2} \\ \text{При} & x < 0 & F(x,y) = 0 \ \Leftrightarrow & x = -\sqrt{1 - y^2} \end{array}$$

Теорема 8.1(о неявной функции). Пусть задана $F(x, y)$ такая, что $F : U \to \mathbb{R}, F \in C^1(U), F(x_0, y_0) = 0$ и $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Тогда $\exists(\alpha > 0, \beta > 0)$ и $f \in C^1(\tilde{U})$, где $\tilde{U} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \Big| |x - x_0| < \alpha, |y - y_0| < \beta\}$ такие, что $\{(x, y) \in \tilde{U} \Big| F(x, y) = 0\} = \{(x, y) \in \tilde{U} \Big| y = f(x)\}$. При этом для $|x - x_0| < \alpha$ $f'(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))\right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))\right)$. Если $F \in C^p(U)$, то $f \in C^p(\{x \in R \Big| |x - x_0| < \alpha\})$.

Док-во. Пусть $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$. Выберем $\beta > 0$, чтобы $\frac{\partial F}{\partial y} > 0$ на $B((x_0, y_0), \beta)$. Тогда $F(x_0, y)$ монотонно возрастает при $|y - y_0| < \beta$ и $F(x_0, y_0 - \beta) < F(x_0, y_0) = 0 < F(x_0, y_0 + \beta)$. Из непрерывности F следует, что $\exists(\alpha > 0)$ т.ч. при $|\tilde{x} - x_0| < \alpha$: $F(\tilde{x}, y_0 - \beta) < 0 < F(\tilde{x}, y_0 + \beta)$. При каждом таком $\tilde{x}$ $F(\tilde{x}, y)$ непрерывна и монотонно возрастает по y. Следовательно,существует и единственный $y_0 - \beta < \tilde{y} < y_0 + \beta$ т.ч. $F(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$. Получили $\tilde{y} = f(\tilde{x})$. То есть, $\{(x, y) \Big| |x - x_0| < \alpha, |y - y_0| < \beta, F(x, y) = 0\} = \{(x, y) \Big| |x - x_0| < \alpha, |y - y_0| < \beta, y = f(x)\}$. Докажем,что f непрерывна. Пусть $0 < \varepsilon < \beta$. Повторим первую часть доказательства и найдем $0 < \delta < \alpha$ так, чтобы $\{(x, y) \Big| |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \varepsilon, F(x, y) = 0\} = \{(x, y) \Big| |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \varepsilon, y = f(x)\}$. Но тогда, $|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - y_0| < \varepsilon$ при всех $|x - x_0| < \delta$. Это доказывает непрерывность в точке (x_0, y_0). Но в остальных точках $B((x_0, y_0), \delta)$ условия теоремы выполнены, и значит,там f также непрерывна.

Докажем,что $f \in C^1$. Применим теорему Лагранжа $0 = F(x+\Delta x, f(x+\Delta x)) - F(x, f(x)) = F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y)\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y)\Delta y$, где $0<\theta<1$, т.е. ввиду $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y)}$$

При $\Delta x \to 0$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))}$. Она непрерывна, ввиду непрерывности $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$. Если $F \in C^p$, т.е. формулу можно непрерывно дифференцировать p раз,например:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{-1}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2}\left(\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\cdot f'(x)\right)\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\cdot f'(x)\right)\right)$$

$\square$

Следствие 8.1. Пусть $U \in \mathbb{R}^{n+1}$, $f \in C^p(U)$, $p>0$, $F(x_0^1,\ldots,x_0^n,z_0)=0$. Предположим, что $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0^1,\ldots,x_0^n,z_0) \neq 0$. Тогда $\exists(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta>0)$ и $f \in C^p(\tilde{U})$, где $\tilde{U} = \{(x,z)\in\tilde{U} \big| |x^i - x_0^i| < \alpha_i, |z - z_0| < \beta\}$ такие, что $\{(x,z)\in\tilde{U} \big| F(x,z)=0\} = \{(x,z)\in\tilde{U}\big| z = f(x)\}$. При этом $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x^i}(x,f(x))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,f(x))}$

§9 Теорема о неявном отображении.

График есть не только у функции, но и у отображения $f : E \to \mathbb{R}^m$. Это совокупность точек вида $(x^1,\ldots,x^n,f^1(x^1,\ldots,x^n)),\ldots,f^m(x^1,\ldots,x^n)) \in \mathbb{R}^{n+m}$.

Опишем условия, когда подмногообразие в $\mathbb{R}^{n+m}$ точек вида:

$$\begin{gathered} F^1(x^1,\ldots,x^n,y^1,\ldots,y^m)=0 \\ \ldots \\ F^m(x^1,\ldots,x^n,y^1,\ldots,y^m)=0 \end{gathered}$$

можно представить в виде графика некоторой функции. Положим

$$F'_x(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial x^n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F^m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial F^m}{\partial x^n} \end{pmatrix} \quad \text{и} \qquad F'_y(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial y^m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F^m}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial F^m}{\partial y^m} \end{pmatrix}$$

Теорема 9.1(о неявном отображении). Пусть отображение $F : U \subset \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ определено в окрестности $(x_0 \in \mathbb{R}^n, y_0 \in \mathbb{R}^m) \in U \subset \mathbb{R}^{n+m}$ такое,что:
1.$F \in C^p, p \geqslant 1$
2.$F(x_0,y_0)=0$
3.$F'_y(x_0,y_0)$ – обратимая матрица.
Тогда, существуют $I_x = \{x \in \mathbb{R}^n \big| |x-x_0| < \alpha\}$, $\qquad I_y = \{y \in \mathbb{R}^m \big| |y - y_0| < \beta\}$, где $I_x \times I_y \subset U$, и $f \in C^p$, где $f : I_x \to I_y$ такие, что $\{(x,y)\in I_x\times I_y \big| F(x,y)=0\} = \{(x,y)\in I_x \times I_y \big| y = f(x)\}$.
При этом $df = -(F'_y(x,f(x)))^{-1}(F'_x(x,f(x)))$.

Док-во. Будем доказывать индукцией по m. При $m=1$ это следствие 8.1. Пусть теорема справедлива для размерности $m-1$. Докажем её для размерности m. F'_y невырождена, и после перенумерации y^i можно считать, что $\frac{\partial F^m}{\partial y^m} \neq 0$.
По следствию 8.1, находим $\tilde{U} = \tilde{U}^{n+m-1}\times\tilde{U}^1 \subset U$ и функцию $\tilde{f} \in C^p, \tilde{f} : \tilde{U}^{n+m-1} \to \tilde{U}^1$ такие, что $\{(x,y)\in\tilde{U}\big| F(x,y)=0\} = \{(x,y)\in\tilde{U}\big| y^m = \tilde{f}(x,y^1,\ldots,y^{m-1})\}$. Положим для $i=1,\ldots,m$: $\Phi^i(x^1,\ldots,x^n,y^1,\ldots,y^{m-1}) = F^i(x^1,\ldots,x^n,y^1,\ldots,y^{m-1},\tilde{f}(x^1,\ldots,y^{m-1}))$ Тогда, $\Phi \in C^p, \Phi^k(x_0^1,\ldots,y_0^{m-1})=0$ и при $i \leqslant m-1$ верно: $\frac{\partial \Phi^k}{\partial y^i} = \frac{\partial F^k}{\partial y^i} + \frac{\partial F^k}{\partial y^m}\cdot\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y^i}$.

Но, по построению $\Phi^m(x^1,\dots,y^{m-1})\equiv 0$ откуда $\frac{\partial F^m}{\partial y^i}+\frac{\partial F^m}{\partial y^m}\cdot\frac{\partial\tilde f}{\partial y^i}=0$. Таким образом, $\det F'_y(x,y)=$

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial y^1} & \frac{\partial F^m}{\partial y^m}\\ \dots & \dots\\ \frac{\partial F^m}{\partial y^1} & \frac{\partial F^m}{\partial y^m}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F^1}{\partial y^1}+\frac{\partial F^1}{\partial y^m}\cdot\frac{\partial\tilde f}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial F^1}{\partial y^{m-1}}+\frac{\partial F^1}{\partial y^m}\cdot\frac{\partial\tilde f}{\partial y^{m-1}} & \frac{\partial F^1}{\partial y^m}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial F^m}{\partial y^1}+\frac{\partial F^m}{\partial y^m}\cdot\frac{\partial\tilde f}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial F^m}{\partial y^{m-1}}+\frac{\partial F^m}{\partial y^m}\cdot\frac{\partial\tilde f}{\partial y^{m-1}} & \frac{\partial F^m}{\partial y^m}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\Phi^1}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial\Phi^1}{\partial y^{m-1}} & \frac{\partial F^1}{\partial y^m}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial\Phi^{m-1}}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial\Phi^{m-1}}{\partial y^{m-1}} & \frac{\partial F^{m-1}}{\partial y^m}\\ 0 & \dots & 0 & \frac{\partial F^m}{\partial y^m}\end{vmatrix}$$

Значит, в окрестности $(x_0^1,\dots,x_0^n,y_0^1,\dots,y_0^{m-1})$ матрица $\begin{pmatrix}\frac{\partial\Phi^1}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial\Phi^1}{\partial y^{m-1}}\\ \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial\Phi^{m-1}}{\partial y^1} & \dots & \frac{\partial\Phi^{m-1}}{\partial y^{m-1}}\end{pmatrix}$ невырождена. По предположению индукции находим $\tilde{\tilde U}=\tilde{\tilde U}^n\times\tilde{\tilde U}^{m-1}\in\tilde U$ и $f\in C^p, f:\tilde{\tilde U}^n\to\tilde{\tilde U}^{m-1}$ такие, что $\{(x,y)\in\tilde{\tilde U}\Big|\Phi(x,y)=0\}=\{(x,y)\in\tilde{\tilde U}\Big|y^i=f^i(x^1,\dots,x^n)\quad i=1,\dots,m-1\}$.
Положим $f^m(x^1,\dots,x^n)=\tilde f(x^1,\dots,x^n,f^1(x^1,\dots,x^n),\dots,f^{m-1}(x^1,\dots,x^n))$.
Таким образом, мы построили $f:I_x\to I_y\ ,f\in C^p,I_x\in\mathbb{R}^n,I_y\in\mathbb{R}^m$

Задача 9.1. Доказать,что $\{(x,y)\in I_x\times I_y\Big|F(x,y)=0\}=\{(x,y)\in I_x\times I_y\Big|y=f(x)\}$.

Таким образом, $F^k(x^1,\dots,x^n,f^1(x^1,\dots,x^n)\dots,f^m(x^1,\dots,x^n))=0$ и $\frac{\partial F^k}{\partial x^i}+\sum\limits_{j=1}^{m}\frac{\partial F^k}{\partial y^j}\cdot\frac{\partial f^j}{\partial x^i}=0$ для $(k=1,\dots,m$ и $i=1,\dots,n)$. То есть $F'_x=-F'_y df$ и $df=-[F'_y]^{-1}F'_x$. □

§10 Приведение отображений к каноническому виду.

Определение. Пусть $U,V\subset\mathbb{R}^n$. Биекция $f:U\to V$ называется C^p–диффеоморфизмом,если $f,f^{-1}\in C^p$

Теорема 10.1(об обратной функции). Пусть $G\subset\mathbb{R}^n$ и $f:G\to\mathbb{R}^n$ такова,что $f\in C^p$, где $p>0$ и $df_{(x_0)}$ обратима. Тогда существуют окрестности $x_0\in U\subset G$ и $f(x_0)\in V\subset\mathbb{R}^n$ такие,что $f:U\to V$ является C^p–диффеоморфизмом.При этом $d(f^{-1})=(df)^{-1}$

Док-во. Рассмотрим функцию $F:G\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, где $F(x,y)=f(x)-y$. Тогда $F\in C^p,F'_x=df$ и $F'_y=-1$. По теореме о неявном отображении существуют окрестности $I_x\ni x_0,I_y\ni y_0=f(x_0)$ и функция $g:I_y\to I_x,g\in C^p$ такие,что $\{(x,y)\in I_x\times I_y|y=f(x)\}=\{(x,y)\in I_x\times I_y|x=g(y)\}$ и при этом $dg=(df)^{-1}$. □

Определение. Пусть $U,V\subset\mathbb{R}^n,E,F\subset\mathbb{R}^m$ и $f:U\to E,h:V\to F$ C^p–отображения. Они называются C^p–эквивалентными,если существует C^p–диффеоморфизмы: $\varphi:U\to V$ и $\psi:E\to F$ такие,что $h\circ\varphi=\psi\circ f$. То есть, следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\varphi} & V\\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle h}\\ E & \xrightarrow{\psi} & F\end{array}$$

Определение. Рангом $f:U\to E$ в точке $x_0\in U$ называется ранг оператора $df_{(x_0)}$, т.е. ранг описывающей его матрицы.

Следствие 10.1. $G\subset\mathbb{R}^n,f:G\to\mathbb{R}^n,f\in C^p$ и ранг f в $x_0\in U$ равен n. Тогда существует окрестность $x_0\in E\subset G$ в которой f C^p–эквивалентно тождественному отображению.

Док-во. Согласно теореме 10.1 существуют окрестности $G\supset U\ni x_0$ и $V\ni f(x_0)$ такие,что $f:U\to V$ есть C^p–диффеоморфизм. Положим $\psi=f^{-1},h=\varphi=Id$. Тогда $h\circ\varphi=\psi\circ f$. □

Задача 10.1. Пусть ранг $f:G\to\mathbb{R}^n$ в $x_0\in G$ равен r. Докажите,что существует окрестность $G\supset U\ni x_0$, в которой ранг $f\geqslant r$. Бывает ли так,что ранг $f>r$ во всех $x\neq x_0$?

Займемся отображениями постоянного ранга.

Пример 10.1. Покажите, что $\mathcal{P}_{n,k}:(x^1,\dots,x^n)\in\mathbb{R}^n\to(x^1,\dots,x^k,0,\dots,0)\in\mathbb{R}^m$ (где $k\leqslant n$) имеет ранг k.

Теорема 10.2. Пусть $G\subset\mathbb{R}^n,f:G\to\mathbb{R}^m,f\in C^p$ и ранг f равен k всюду на G. Тогда для любой $x_0\in G$ существует окрестность $U\ni x_0$, где f C^p–эквивалентна проекции $\mathcal{P}_{n,k}$.

Док-во. Можно считать,что $x = (x^1, \dots, x^n), f = (f^1, \dots, f^m)$, и матрица $\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \frac{\partial f^1}{\partial x^k} \\ \dots & \dots \\ \frac{\partial f^k}{\partial x^1} & \frac{\partial f^k}{\partial x^k} \end{pmatrix}$ невырождена.

$$d\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^k} & \frac{\partial f^1}{\partial x^{k+1}} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f^k}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^k}{\partial x^k} & \frac{\partial f^k}{\partial x^{k+1}} & \dots & \frac{\partial f^k}{\partial x^n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & & \\ \dots & \dots & \dots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

Положим $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^n)$, где $\varphi^i = f^i$ при $i \leqslant k$ и $\varphi^i(x^1, \dots, x^n) = x^i$ при $i > k$. По теореме 10.1 существует связная окрестность $G \supset U \ni x_0$, где φ — C^p-диффеоморфизм. Положим $g = f \circ \varphi^{-1}$. Тогда $g = (g^1, \dots, g^m)$, где $g^i(x^1, \dots, x^n) = x^i$ при $i \leqslant k$. Матрица Якоби g равна:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \dots & \dots & \dots \\ & & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial g^{k+1}}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial g^{k+1}}{\partial x^k} & \frac{\partial g^{k+1}}{\partial x^{k+1}} & \dots & \frac{\partial g^{k+1}}{\partial x^n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g^m}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial g^m}{\partial x^k} & \frac{\partial g^m}{\partial x^{k+1}} & \dots & \frac{\partial g^m}{\partial x^n} \end{array}\right)$$

С другой стороны, по теореме 5.4 имеем $dg = df \cdot d(\varphi^{-1})$. Значит, ранг g на $\tilde{V} = \varphi(U)$ равен k. Следовательно,правая нижняя четверть матрицы нулевая.Согласно теореме 6.2 отсюда вытекает, что функции $g^{k+1}, \dots, g^m$ не зависят от $x^{k+1}, \dots, x^n$. Рассмотрим теперь $\psi = (\psi^1, \dots, \psi^m)$, где $\psi^i(y^1, \dots, y^n) = y^i$ при $i \leqslant k$ и $\psi^i(y^1, \dots, y^n) = y^i - g^i(y^1, \dots, y^k)$ при $i > k$. Тогда $\psi \in C^p$ и ее матрица Якоби имеет следующий вид:

$$d\psi = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \dots & \dots & \dots \\ & & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\partial g^{k+1}}{\partial y^1} & \dots & -\frac{\partial g^{k+1}}{\partial y^k} & 1 & & \\ \dots & \dots & \dots & & \ddots & \\ -\frac{\partial g^m}{\partial y^1} & \dots & -\frac{\partial g^m}{\partial y^k} & & & 1 \end{array}\right)$$

По теореме 10.1 существует окрестность $f(x_0) \in V \subset \tilde{V}$, где ψ — C^p-диффеоморфизм. Положим теперь $h = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \in C^p$. Тогда $h(x) = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x) = \psi(g(x)) = \psi(g^1(x), \dots, g^m(x)) = \big(\psi^1(g^1(x), \dots, g^m(x)), \dots, \psi^m(g^1(x), \dots, g^m(x))\big)$. При $j \geqslant k$ имеем $g^j(x) = x^j$ и, значит, для $x = (x^1, \dots, x^n)$: $h(x) = (x^1, \dots, x^k, g^{k-1}(x) - g^{k-1}(x), \dots, g^m(x) - g^m(x)) = (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0)$.

$\square$

Определение. C^p–диффеоморфизм $g : U \to \mathbb{R}^n$ назовем простейшим, если он имеет вид $g = (g^1, \dots, g^m)$, где $g^i(x^1, \dots, x^n) = x^i$ при $i \neq j$ для некоторого j (то есть меняется лишь одна координата).

Лемма 10.1. Пусть $f : G \to \mathbb{R}^n$ C^p–диффеоморфизм, и $x_0 \in G$. Тогда, найдется окрестность $x_0 \in U \subset G$, где $f = g_1 \circ \dots \circ g_k$, и g_i-простейшие диффеоморфизмы.

Док-во. Проведем индукцию по k. При $k = 1$ это очевидно. Пусть утверждение доказано для при $k < m$. По условию имеем:

$$df = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^m} & \frac{\partial f^1}{\partial x^{m+1}} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^m}{\partial x^m} & \frac{\partial f^m}{\partial x^{m+1}} & \dots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & & \\ \dots & \dots & \dots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & & & 1 \end{array}\right)$$

Отсюда видно,что ранг $\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \frac{\partial f^1}{\partial x^m} \\ \dots & \dots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1} & \frac{\partial f^m}{\partial x^m} \end{pmatrix}$ равен m. Значит, есть главный минор, не равный нулю. Пусть это $\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \frac{\partial f^1}{\partial x^{m-1}} \\ \dots & \dots \\ \frac{\partial f^{m-1}}{\partial x^1} & \frac{\partial f^{m-1}}{\partial x^{m-1}} \end{pmatrix}$ Рассмотрим отображение $\tilde{f} = (\tilde{f}^1, \dots, \tilde{f}^n)$, где $\tilde{f}^i = f^i$ при $i \neq m$ и $\tilde{f}^m = x^m$. Тогда:

$$d\tilde{f} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^{m-1}} & & & \\ \dots & \dots & \dots & & * & \\ \frac{\partial f^{m-1}}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^{m-1}}{\partial x^{m-1}} & & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & & \\ \dots & \dots & \dots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & & & 1 \end{array}\right)$$

И следовательно,по теореме 10.1 $\tilde{f}$ есть C^p–диффеоморфизм в некоторой окрестности точки x_0. Положим $h = f\circ\tilde{f}^{-1}$. Тогда, $h = (h^1, \ldots, h^n)$ является простейшим в координатах $(\tilde{f}^1(x), \ldots, \tilde{f}^n(x))$. Но $f = h \circ \tilde{f}$ и к $\tilde{f}$ можно применить предположение индукции. □

§11 Лемма Морса.

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n, E \subset \mathbb{R}^m$. Максимально возможный ранг $f : U \to E$ в $x \in U$ равен $\min(n, m)$. Такие точки образуют открытое множество и на нём f эквивалентна линейному вложению или линейной проекции(т-ма 10.2). Остальные точки называются критическими. Именно они определяют глобальные свойства отображений.

Определение. Точки x_0, где ранг $f : U \to E$ меньше $\min(n, m)$ называются критическими.

Так, как мы будем заниматься функциями, то $\min(n, m) = 1$ и точка критическая$\Leftrightarrow$ $df_{(x_0)} = 0$. В этом случае $f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2}\sum \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0)(x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j) + \bar{\bar{o}}(|x - x_0|^2)$

Определение. Матрица $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$ называется Гессианом. Если она невырождена, то и критическая точка называется невырожденной.

Задача 11.1. Если функции $f : U \to E$ и $g : V \to F$ эквивалентны и x_0 – невырожденная критическая точка f, то соответствующая точка $y_0 \in V$ является невырожденой критической точкой для g.

Пример 11.1. $f(x) = a_{ij}x^i x^j$. Точка 0 – критическая и невырождена, если матрица a_{ij} невырождена.

Наша цель–доказать, что в окрестности невырожденной критической точки любая функция эквивалентна $\sum\limits_{i=1}^{n} \tau_i \cdot (x^i)^2$, где $\tau_i = \pm 1$

Лемма 11.1(Hadamard). Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ – выпуклая окрестность 0. $f : U \to \mathbb{R}, f(0) = 0$ и $f \in C^p, p > 0$. Тогда существуют $g_i : U \to \mathbb{R}, g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(0), g_i \in C^{p-1}$ такие, что

$$f(x^1, \ldots, x^n) = \sum_{i=1}^{n} x^i \cdot g_i(x^1, \ldots, x^n).$$

Док-во.

$$f(x^1, \ldots, x^n) = \int\limits_0^1 \frac{df(tx^1, \ldots, tx^n)}{dt}dt = \int\limits_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} x^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(tx^1, \ldots, tx^n)\right) dt =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x^i \int\limits_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(tx^1, \ldots, tx^n)dt = \sum_{i=1}^{n} x^i g_i, \text{ где } g_i(x^1, \ldots, x^n) = \int\limits_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(tx^1, \ldots, tx^n)dt.$$

Задача 11.2. Доказать, что $g_i \in C^{p-1}$ и $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$. □

Теорема 11.1(Morse Lemm). Пусть $G \subset \mathbb{R}^n, f : G \to \mathbb{R}, f \in C^3$, и $x_0 \in G$ – невырожденная критическая точка f. Тогда существует окрестность $G \ni x_0$, где f эквивалентна $g(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \tau_i(x^i)^2, \tau_i = \pm 1$.

Док-во. Линейными заменами и двойным применением леммы 11.1 вопрос сводится к случаю, когда $x_0 = 0$ и $f(x^1, \ldots, x^n) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} x^i x^j h_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$, где $h_{ij}(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(0)$. Будем приводить эту "квадратичную форму" к диагональному виду с помощью диффеоморфизмов. Сначала, приведем ее к виду $\pm(x^1)^2 + \sum\limits_{i,j>1} h_{ij}x^i x^j$, потом к виду $\pm(x^1)^2 \pm (x^2)^2 + \sum\limits_{i,j>2} h_{ij}x^i x^j$ etc. Опишем общий шаг. Пусть $f(x^1, \ldots, x^n) = \pm(x^1)^2 \pm \cdots \pm (x^{r-1})^2 + \sum\limits_{i,j \geqslant r} x^i x^j h_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$. Согласно задаче 11.1 0-невырожденная критическая точка, и следовательно, матрица $\{h_{ij}(0)\}$ невырождена. Можно считать, что $h_{rr}(0) \neq 0$ и более того $h_{rr} \neq 0$ на $V \ni 0$. Положим $\Psi(x) = \sqrt{|h_{rr}(x)|} : V \to \mathbb{R}$. Пусть

$\varphi : V \to \mathbb{R}^n$, где $\varphi^i(x) = x^i$ при $i \neq r$ и $\varphi^r(x) = \Psi(x)\left(x^r + \sum\limits_{i>r} \frac{x^i h_{ir}(x)}{h_{rr}(x)}\right)$. Якобиан φ не равен нулю в 0. И по теореме 10.1 φ–диффеоморфизм на $V \supset U \ni 0$. Кроме того

$$\begin{aligned}\pm (x^1)^2 \pm \dots \pm (x^{r-1})^2 + \sum_{i,j \geqslant r} x^i x^j h_{ij}(x^1, \dots, x^n) = \\ = \pm(x^1)^2 \pm \dots \pm (x^{r-1})^2 + (x^r)^2 h_{rr}(x) + 2\sum_{j>r} x^r x^j h_{rj}(x) + \sum_{i,j>r} x^i x^j h_{ij}(x) = \\ = \pm(\varphi^1(x))^2 \pm \dots \pm (\varphi^r(x))^2 - \frac{1}{h_{rr}}(x)\left(\sum_{i>r} \varphi^i(x) h_{ir}(x)\right)^2 + \sum_{i,j>r} (\varphi^i(x))^2 (\varphi^j(x))^2 h_{ij}(x).\end{aligned}$$

Таким образом, мы нашли диффеоморфизм φ, увеличивающий количество "правильных" членов в представлении функции f. □

Задача 11.3. Количество плюсов и минусов среди τ_i называется сигнатурой критической точки. Как найти сигнатуру по ряду Тейлора f ?

§12 Подмногообразия.Условия экстремума.Множители Лагранжа.

Определение. Множество $S = \{x \in D | F(x^1, \dots, x^n) = 0\}, F \in C^1$ называется гиперповерхностью в $D \subset \mathbb{R}^n$. Для $x_0 \in S$ и $dF(x_0) \neq 0$ множество $TF(x_0) = \{x_0 + v| < dF(x_0), v >= 0\}$ называется касательной плоскостью к S в точке x_0.

Определение. Множество $S = \{x \in D \Big| F_i(x^1, \dots, x^n) = 0, i = 1, \dots, k\}, F_i \in C^1$ называется неособой поверхностью коразмерности k, если ранг $\{\frac{\partial F_i}{\partial x^j}\} = k$ во всех точках $x \in S$. Для $x_0 \in S$ множество $TS_{x_0} = \bigcap\limits_{i=1}^{k} TF_i(x_0)$ называется касательной плоскостью к S в точке x_0.

Лемма 12.1. $TS_{x_0} = x_0 + T$, где T – множество всех векторов вида $\frac{\partial x}{\partial t}(0)$, где $x(t) \in S$ и $x(0) = x_0$.

Док-во. $x_0 + T \subset TS_{x_0}$ достаточно доказать для $k = 1$. В этом случае имеем $x(t) \in S \Leftrightarrow F(x(t)) = 0 \Rightarrow \sum \frac{\partial F}{\partial x^i} \frac{x^i(t)}{dt} = 0$ При $t = 0$ это $< dF(x_0), \frac{dx^i}{dt}(0) >= 0$. Обратно: представим $F = 0$ в виде графика(теорема 9.1) и тогда это следует из теоремы 7.1. □

Пусть теперь $f : D \to \mathbb{R}, f \in C^1$

Определение. Локальный экстремум $f\,|_S$ называется условным экстремумом f на S.

Это понятие очень важно в приложениях.

Теорема 12.1. Пусть $x_0 \in S$ – точка условного экстремума f на S и $df(x_0) \neq 0$. Тогда $TS_{x_0} \subset T(f - f(x_0))(x_0)$.

Док-во. Пусть $f(x_0) + v \in TS_{x_0}$. Согласно лемме 12.1 $v = \frac{dx}{dt}(0)$, где $x(t) \subset S, t \in [0, 1], x(0) = f(x_0)$. Функция $x(t)$ имеет экстремум в 0. Отсюда $0 = \frac{d}{dt}(f(x(0))) =< df(x_0) \cdot \frac{dx}{dt}(0) >=< df(x_0) \cdot v >$. То есть $f(x_0) + v \in T(f - f(x_0))(x_0)$. □

Определение. Для $f : D \to \mathbb{R}$ положим $\operatorname{grad} f(x_0) \in \mathbb{R}^n$ – вектор такой, что $< df(x_0), v >= (\operatorname{grad} f(x_0), v)$ для всех векторов v.

В этих обозначениях $TS_{x_0} = \{f(x_0) + v | (v, \operatorname{grad} F_i(x_0)) = 0, i = 1, \dots, k\}$ и $T(f - f(x_0))(x_0) = \{f(x_0) + v | (v, \operatorname{grad} f(x_0)) = 0\}$. Тогда утверждение теоремы 12.1 означает, что $\operatorname{grad} f(x_0)$ порожден $\{\operatorname{grad} F_i(x_0)\}$.

Следствие 12.1. Если $x_0 \in S$ – точка условного экстремума f на S и $df(x_0) \neq 0$, то $\operatorname{grad} f(x_0) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \operatorname{grad} F_i(x_0)$.

Это наводит на мысль рассмотреть функцию $L(x,\lambda) = f(x) - \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot F_i(x)$, называюшуюся функцией Лагранжа. При этом λ_i называются множителями Лагранжа. Её глобальный экстремум на S даёт условный экстремум f, а градиент $= 0$ при $\{\lambda_i\}$ из Следствия 12.1.

Теорема 12.2. Пусть $f \in C^2, F_i \in C^2 \quad (i = 1,\dots,k) : D \to \mathbb{R}$, где $D \subset \mathbb{R}^n, S = \{x \in D | F_i(x^1,\dots,x^n) = 0, i = 1,\dots,k\}$ – неособая поверхность, $\operatorname{grad} f(x_0) = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot F_i(x_0)$

$$L(x) = f(x^1,\dots,x^n) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot F_i(x^1,\dots,x^n)$$

и форма $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial x^j}(x_0)\xi^i\xi^j$ знакоопределена на векторах $(\xi^1,\dots,\xi^n) \in TS_{x_0} - x_0$. Тогда x_0 – точка условного экстремума f на S. Это точка локального минимума, если форма положительно определена и точка локального максимума, если форма отрицательно определена.

Док-во. Пусть форма положительна определена. По условию $\operatorname{grad} L(x_0) = 0$. По формуле Тейлора $L(x) - L(x_0) = \frac{1}{2}\sum \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial x^j}(x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j) + \bar{\bar{o}}(|x - x_0|^2)$ при $x \to x_0$. Для любого $x(t) \subset S, t \in (0,1), x(0) = x_0$ при достаточно малом t первое слагаемое близко к $\frac{1}{2}\sum \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial x^j}(x_0)\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} \cdot t^2$ и следовательно, положительно. Второй член падает быстрее первого, значит $L(x(t)) - L(x_0)$ положительно при малом t. То есть x_0 – условный экстремум. □

Замечание – Задача 12.1 На практике, обычно, надо:

1) написать $L(x,\lambda)$, считая x и λ неизвестными.
2) найти x_0 и $(\lambda_1,\dots,\lambda_k)$ из условия $dL = 0$.

(Докажите, что это условие эквивалентно $\operatorname{grad} f(x_0) = \sum \lambda_i \cdot \operatorname{grad} F_i(x_0)$)

3) найти квадратичную форму $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial x^j}(x_0)$.
4) ограничить её на TS_{x_0}.
5) найти её сигнатуру.

Пример 12.1. Найдём экстремум функции $f(x,y) = x^2 - y^2$ на плоскости $2x - y - 3 = 0$. Функция Лагранжа: $L(x) = x^2 - y^2 - \lambda(2x - y - 3)$. Множители Лагранжа и критические точки найдём из уравнений:

$$0 = \frac{\partial L}{\partial x} = 2x - 2\lambda \qquad 0 = \frac{\partial L}{\partial y} = -2y + \lambda \qquad 0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = -2x + y + 3$$

Тогда имеем:

$$\lambda = 2, x = 2, y = 1 \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = -2, \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0$$

Форма равна $2(\xi_x^2 - \xi_y^2)$ на векторах (ξ_x, ξ_y).
Касательный вектор – это $-2\xi_x + \xi_y = 0 \Rightarrow \xi_y = 2\xi_x$.
Значение формы на них $2(\xi_x^2 - 4\xi_x^2) = -6\xi_x^2 < 0$. То есть максимум.

§13 Интеграл.

В одномерной ситуации мы интегрируем по отрезку. В многормерной – по параллелепипеду.

$$I^n = \{(x^1,\dots,x^n) \in \mathbb{R}^n | \alpha^i \leqslant x^i \leqslant \beta^i (i = 1,\dots,n)\} \subset \mathbb{R}^n$$

Его объём $\operatorname{Vol}(I^n) = \prod\limits_{i=1}^{n}(\beta^i - \alpha^i)$. Прямое произведение $I^n \times I^m \subset \mathbb{R}^{n+m}$ – тоже параллелепипед. В частности, I^n – прямое произведение отрезков. $I_\alpha^\beta = \{\alpha \leqslant x \leqslant \beta\} \subset \mathbb{R}^1$. Разбиение I_α^β – это $I_\alpha^{\gamma_1} \cup I_{\gamma_1}^{\gamma_2} \cup \dots \cup I_{\gamma_k}^{\beta}$. Прямое произведение таких разбиений задает разбиение $I^n = \bigcup\limits_{\varepsilon} I_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$. Суммой разбиений $I = \bigcup\limits_{\varepsilon} I'_\varepsilon$ и $I = \bigcup\limits_{\delta} I''_\delta$ называется разбиение $\{I'_\varepsilon \cap I''_\delta\}$.

Пусть $f : I \to \mathbb{R}$ – ограниченная функция. Положим $m_\varepsilon(f) = \inf\limits_{x\in I_\varepsilon} f(x)$ и $M_\varepsilon(f) = \sup\limits_{x\in I_\varepsilon} f(x)$. Суммы $s_{\{I_\varepsilon\}}(f) = \sum\limits_\varepsilon m_\varepsilon(f)\operatorname{Vol}(I_\varepsilon)$ и $S_{\{I_\varepsilon\}}(f) = \sum\limits_\varepsilon M_\varepsilon(f)\operatorname{Vol}(I_\varepsilon)$ называются нижней и верхней суммой Дарбу по разбиению $\{I_\varepsilon\}$.

Лемма 13.1. Любая верхняя сумма Дарбу больше любой нижней.

Док-во. Пусть $\{\tilde I_\alpha\}$ сумма разбиений $\{I_\varepsilon\}$ и $\{I'_\delta\}$. Тогда

$$s_{\{I_\varepsilon\}}(f) = \sum_\varepsilon m_\varepsilon(f)\operatorname{Vol}(I_\varepsilon) \leqslant \sum_\alpha m_\alpha(f)\operatorname{Vol}(\tilde I_\alpha) \leqslant \sum_\alpha M_\alpha(f)\operatorname{Vol}(\tilde I_\alpha) \leqslant \sum_\delta M_\delta(f)\operatorname{Vol}(I'_\delta) = S_{\{I'_\delta\}}(f)$$

□

Определение. Функция f называется интегрируемой, если $\sup\limits_{\{I_\varepsilon\}} s_{\{I_\varepsilon\}}(f) = \inf\limits_{\{I_\rho\}} S_{\{I_\rho\}}(f)$. В этом случае их общее значение называется интегралом и обозначается $\int\limits_I f(x)dx^1\cdots dx^n$.

Пример 13.1. Если $f(x) = c = const$, то $\int\limits_I f(x)dx^1\cdots dx^n = c\operatorname{Vol}(I)$.

Докажем, что непрерывная функция интегрируема.Для этого нам понадобится

Лемма 13.2. Непрерывная функция $f : I \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна на I.То есть

$$\forall(\varepsilon > 0)\exists(\delta > 0)\forall(\|x - x'\| < \delta, x, x' \in I) : |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

Док-во. Предположим обратное. Тогда $\exists(\varepsilon > 0)\forall(n > 0, n \in \mathbb{Z})\exists(x_n, x'_n, |x_n - x'_n| < \frac{1}{n}) : |f(x_n) - f(x'_n)| > \varepsilon$. Применяя теорему Больцано-Вейерштрасса к каждой координате (или используя задачу 2.1) находим сходящуюся подпоследовательность $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots$, где $\lim\limits_{i\to\infty} x_{n_i} = x \in I$. Ввиду $\lim\limits_{i\to\infty}(x_{n_i} - x'_{n_i}) = 0$ имеем $\lim\limits_{i\to\infty} x'_{n_i} = x$. Ввиду непрерывности $\lim\limits_{i\to\infty} f(x_{n_i}) = f(x) = \lim\limits_{i\to\infty} f(x'_{n_i})$ и следовательно $|f(x_{n_i}) - f(x'_{n_i})| < \varepsilon$ для достаточно больших i. □

Задача 13.1. Докажите, что непрерывная на любом компакте функция равномерно непрерывна на нём.

Теорема 13.1. Непрерывная функция $f : I \to \mathbb{R}$ интегрируема.

Док-во. Пусть $\varepsilon > 0$. Согласно лемме 13.2 существует $\delta > 0$ такое, что $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ при $\|x - x'\| < \delta$. Рассмотрим разбиение $\{I_\alpha\}$ такое, что диаметр каждого I_α не больше δ. Тогда $\sup\limits_{x\in I_\alpha} f(x) - \inf\limits_{x\in I_\alpha} f(x) < \varepsilon$. Следовательно $S_{\{I_\alpha\}} - s_{\{I_\alpha\}} = \sum\limits_\alpha (M_\alpha(f) - m_\alpha(f))\operatorname{Vol}(I_\alpha) \leqslant \varepsilon \sum\limits_\alpha \operatorname{Vol}(I_\alpha) = \varepsilon\operatorname{Vol}(I)$. То есть $\inf\limits_{\{I_\alpha\}} S_{\{i_\alpha\}} = \sup\limits_{\{I_\alpha\}} s_{\{i_\alpha\}}$. □

Теорема 13.2. Если f_1 и f_2 интегрируемы на I, то $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ тоже интегрируема для любых $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ и

$$\int\limits_I (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)dx^1\cdots dx^n = \lambda_1 \int\limits_I f_1 dx^1\cdots dx^n + \lambda_2 \int\limits_I f_2 dx^1\cdots dx^n$$

Док-во. Пусть $\{I'_\alpha\}$ и $\{I''_\beta\}$ разбиения I и I_ε – их сумма.Тогда

$$s_{\{I'_\alpha\}}(f_1) + s_{\{I''_\beta\}}(f_2) \leqslant s_{\{I_\varepsilon\}}(f_1) + s_{\{I_\varepsilon\}}(f_2) = \sum_\varepsilon \inf_{x\in I_\varepsilon} f_1(x)\operatorname{Vol}(I_\varepsilon) + \sum_\varepsilon \inf_{x\in I_\varepsilon} f_2(x)\operatorname{Vol}(I_\varepsilon) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_\varepsilon \inf_{x\in I_\varepsilon} ((f_1 + f_2)(x))\operatorname{Vol}(I_\varepsilon) = s_{\{I_\varepsilon\}}(f_1 + f_2) \leqslant S_{\{I_\varepsilon\}}(f_1 + f_2) = \sum_\varepsilon \sup_{x\in I_\varepsilon} ((f_1 + f_2)(x))\operatorname{Vol}(I_\varepsilon) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_\varepsilon \sup_{x\in I_\varepsilon} f_1(x)\operatorname{Vol}(I_\varepsilon) + \sum_\varepsilon \sup_{x\in I_\varepsilon} f_2(x)\operatorname{Vol}(I_\varepsilon) = S_{\{I_\varepsilon\}}(f_1) + S_{\{I_\varepsilon\}}(f_2) \leqslant S_{\{I'_\alpha\}}(f_1) + S_{\{I''_\beta\}}(f_2).$$

Таким образом

$$\int\limits_I f_1(x)dx^1\cdots dx^n+\int\limits_I f_2(x)dx^1\cdots dx^n=\sup_{\{I'_\alpha\}} s_{\{I'_\alpha\}}(f_1)+\sup_{\{I''_\beta\}} s_{\{I''_\beta\}}(f_2)\leqslant \sup_{\{I_\varepsilon\}} s_{\{I_\varepsilon\}}(f_1+f_2)\leqslant$$

$$\leqslant \inf_{\{I_\varepsilon\}} S_{\{I_\varepsilon\}}(f_1+f_2)\leqslant \inf_{\{I'_\alpha\}} S_{\{I'_\alpha\}}(f_1)+\inf_{\{I''_\beta\}} S_{\{I''_\beta\}}(f_2)=\int\limits_I f_1(x)dx^1\cdots dx^n+\int\limits_I f_2(x)dx^1\cdots dx^n.$$

Отсюда

$$\sup_{\{I_\varepsilon\}} s_{\{I_\varepsilon\}}(f_1+f_2)=\inf_{\{I_\varepsilon\}} S_{\{I_\varepsilon\}}(f_1+f_2)=\int\limits_I f_1(x)dx^1\cdots dx^n+\int\limits_I f_2(x)dx^1\cdots dx^n$$

Значит f_1+f_2 интегрируема и

$$\int\limits_I (f_1+f_2)(x)dx^1\cdots dx^n=\int\limits_I f_1(x)dx^1\cdots dx^n+\int\limits_I f_2(x)dx^1\cdots dx^n$$

Равенство $\int\limits_I \lambda f(x)dx^1\cdots dx^n=\lambda\int\limits_I f(x)dx^1\cdots dx^n$ доказывается аналогично. $\square$

§14 Теорема Фубини.

Разобьем координаты на две группы (u,v), т.е. $(x^1,\dots,x^n)=(u^1,\dots,u^p,v^1,\dots,v^q)$. Тогда, $I=I^u\times I^v$.

Теорема 14.1. Если $f:I\to\mathbb{R}$–непрерывна, то $F(u)=\int\limits_{I^v} f(u,v)dv^1\cdots dv^q$ тоже непрерывна.

Док-во. Пусть $\varepsilon>0$. Согласно лемме 13.2 $\exists(\delta>0)\forall(\|x-x'\|<\delta):|f(x)-f(x')|<\frac{\varepsilon}{\operatorname{Vol}(I^v)}$. Пусть I^v_β – разбиение I^v с диаметром $<\frac{\delta}{2}$. Пусть $|u_1-u_2|<\delta/2$ и для определенности $F(u_1)\geqslant F(u_2)$. Тогда $|F(u_1)-F(u_2)|=\int\limits_{I^v} f(u_1,v)dv-\int\limits_{I^v} f(u_2,v)dv\leqslant\sum\limits_\beta(\sup\limits_{v\in I_\beta} f(u_1,v)-\inf\limits_{v\in I_\beta} f(u_2,v))\operatorname{Vol}(I^v_\beta)\leqslant\varepsilon$. То есть $F(u)$ – непрерывна. $\square$

Теорема 14.2 (Fubini). Пусть $f(u,v)$ интегрируема на $I=I^u\times I^v$ и $F(u)=\int\limits_{I^v} f(u,v)du$ существует при каждом $u\in I^u$. Тогда F интегрируема на I^u и:

$$\int\limits_I f(u,v)dudv=\int\limits_{I^u} F(u)du=\int\limits_{I^u}\left(\int\limits_{I^v} f(u,v)dv\right)du$$

Док-во. Пусть I^u_α и I^v_β разбиения I^u и I^v и $I_\varepsilon=I^u_\alpha\times I^v_\beta$

$$s_{\{I_\varepsilon\}}(f)=\sum_{\alpha,\beta}\inf_{u\in I^u_\alpha,v\in I^v_\beta} f(u,v)\operatorname{Vol}(I^u_\alpha)\operatorname{Vol}(I^v_\beta)=\sum_\alpha\inf_{v\in I_\alpha}\left(\sum_\beta\inf_{u\in I^u_\beta} f(u,v)\operatorname{Vol}(I^v_\beta)\right)\operatorname{Vol}(I^u_\alpha)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_\alpha\inf_{u\in I^u_\alpha}\left(\int\limits_{I^v} f(u,v)dv\right)\operatorname{Vol}(I^u_\alpha)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_\alpha\sup_{u\in I^u_\alpha}\left(\int\limits_{I^v} f(u,v)dv\right)\operatorname{Vol}(I^u_\alpha)\leqslant\sum_\alpha\sup_{v\in I_\alpha}\left(\sum_\beta\sup_{u\in I^u_\beta} f(u,v)\operatorname{Vol}(I^v_\beta)\right)\operatorname{Vol}(I^u_\alpha)=S_{\{I_\varepsilon\}}(f)$$

Отсюда $\int\limits_I f(u,v)dudv=\sup\limits_{\{I_\varepsilon\}} s_{\{I_\varepsilon\}}(f)\leqslant\int\limits_{I^u} F(u)du\leqslant\inf\limits_{\{I_\varepsilon\}} S_{\{I_\varepsilon\}}(f)=\int\limits_I f(u,v)dudv$

$\square$

Следствие 14.1. Если $f(u,v)$ непрерывна на $I = I^u \times I^v$, то

$$\int\limits_I f(u,v)dudv = \int\limits_{I^u} \left(\int\limits_{I^v} f(u,v)dv \right) du$$

§15 Множества меры 0.

Определение. Говорят, что $E \subset \mathbb{R}^n$ имеет n-мерную меру Лебега 0 и пишут $\mu_n(E) = 0$, если $\forall \varepsilon > 0$ существует покрытие $E \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} I_i$ n-мерными параллелепипедами $\{I_1, I_2, \dots\}$ такое, что $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{Vol}(I_i) < \varepsilon$.

Задача 15.1. Объединение счетного числа множеств меры 0 также имеет меру 0. Множество рациональных точек в $\mathbb{R}^n$ имеет n-мерную меру 0.

Задача 15.2. Пусть $I \subset \mathbb{R}^n$ — n-мерный параллелепипед и $f : I \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Тогда ее график $\Gamma_f \subset \mathbb{R}^{n+1}$ имеет $(n+1)$-мерную меру 0.

Задача 15.3. Если $I \subset \mathbb{R}^n$ — параллелепипед, $B \subset I$ — множество меры 0, то $\overline{(I \setminus B)} = I$.

Теорема 15.1. Пусть $B \subset \mathbb{R}^n$ — компактное подмножество и все $B_t = \{(x^1, \dots, x^n) \in B | x^1 = t\}$ имеют $(n-1)$-мерную меру 0. Тогда B имеет n-мерную меру 0.

Док-во. Пусть $\varepsilon > 0$. Зафиксируем t. Покроем множество B_t множеством открытых кубов $B_t \subset A_t = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_t^i \subset \mathbb{R}^{n-1}$ таких, что $\mu_{n-1}(A_t) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu_{n-1}(A_t^i) < \varepsilon$. (Такое покрытие легко получить из покрытия компактными кубами $\tilde{A}_t^i$, где $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu_{n-1}(\tilde{A}_t^i) < \varepsilon$.) Положим $A_{t,\alpha} = [t-\alpha, t+\alpha] \times A_t \subset \mathbb{R}^n$. Докажем, что $\exists (\alpha > 0)$ такое, что $\bigcup\limits_{t-\alpha \leqslant s \leqslant t+\alpha} B_s \subset A_{t,\alpha}$. Действительно, в противном случае существует последовательность $t_m \to t$ $(m \to \infty)$ и $b_m \in B_{t_m}$, такие, что $b_m \notin A_{t,|t-t_m|}$. Согласно теореме Больцано-Вейерштрасса, существует подпоследовательность $b_{m_i} \to b$. Но тогда $b_{m_i} = (b^1_{m_i}, \dots, b^n_{m_i}) = (t_{m_i}, \tilde{b}_{m_i})$, где $\tilde{b}_{m_i} \subset \mathbb{R}^{n-1}$. При $(i \to \infty)$ $b_{m_i} \to b = (t, \tilde{b}) \in B_t \subset A_t$. Но A_t — открытое в $\mathbb{R}^n$ множество, и поэтому, начиная с некотрого i, $\tilde{b}_{m_i} \in A_t$, то есть $b_{m_i} = (t, \tilde{b}_{m_i}) \in A_{t,|t-t_{m_i}|}$. Полученное противоречие показывает, что $\forall (t) \exists (\alpha_t) : \bigcup\limits_{t-\alpha_t \leqslant s \leqslant t+\alpha_t} B_s \subset A_{t,\alpha_t}$. Пусть $[a,b]$ — проекция B на x^1. Интервалы $(t-\alpha_t, t+\alpha_t)$ покрывают все $[a,b]$. Выберем минимальное конечное подпокрытие $[a,b] \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$, где $a_i = t_i - \alpha_{t_i}$, $b_i = t_i + \alpha_{t_i}$, то есть такое, что для любого k, $[a,b] - (\bigcup\limits_{i \neq k} [a_i, b_i]) \neq \emptyset$. Тогда каждая точка покрыта не более, чем двумя отрезками. Следовательно $\sum\limits_{i=1}^{n} |a_i - b_i| \leqslant 2|a-b|$. Отсюда $\sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{Vol}(A_{t_i,\alpha_{t_i}}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{Vol}(A_{t_i})|a_i - b_i| \leqslant 2\varepsilon|a-b|$. Но $B \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} (\bigcup\limits_{a_i \leqslant s \leqslant b_i} B_s) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_{t_i,\alpha_{t_i}}$. Следовательно, n-мерная мера равна 0. □

Определение. Если какое-нибудь свойство выполняется во всех точках, кроме множества меры 0, то говорят, что оно выполняется почти всюду.

Задача 15.4. Пусть $I = I^u \times I^v$ и $f : I \to \mathbb{R}$ – интегрируема. Тогда интеграл $\int\limits_{I^v} f(u,v)du$ существует для почти всех $u \in I^u$.

§16 Критерий Лебега интегрируемости по Риману.

Определение. Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ – ограниченная функция. Колебанием функции f в точке $x \in E$ называется $\omega(f,x) = \lim\limits_{\delta \to 0} \sup\limits_{x_1, x_2 \in E \cap B(x,\delta)} |f(x_1) - f(x_2)|$.

Задача 16.1. f непрерывна в x, если и только если $\omega(f,x) = 0$.

Лемма 16.1. Пусть E компакт и $f : E \to \mathbb{R}$ такая, что $\forall (x \in E)$ $\omega(f,x) \leqslant c$. Тогда $\forall (\varepsilon > 0) \exists (\delta > 0) \forall (|x_1 - x_2| < \delta) : |f(x_1) - f(x_2)| < c + \varepsilon$.

Док-во. Повторяет доказательство леммы 13.2. То есть, если лемма не верна, то $\exists(\varepsilon > 0)\forall(n > 0)\exists(x_n, x_n'; |x_n - x_n'| < \frac{1}{n}) : \quad |f(x_n) - f(x_n')| > c + \varepsilon$. Переходя к подпоследовательности(теорема Больцано-Вейерштрасса) можно считать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n'$. Откуда $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x_n) - f(x_n')| \leqslant \omega(f, x) \leqslant c$, что невозможно. □

Теорема 16.1. Пусть $I \subset \mathbb{R}^n$ – параллелепипед и $f : I \to \mathbb{R}$ – ограниченная, интегрируемая по Риману функция. Тогда множество точек разрыва f имеет n-мерную меру Лебега 0.

Док-во. Пусть E – множество точек разрыва f. Положим $E_m = \{x \in I | \omega(f, x) \geqslant \frac{1}{m}\}$. Зафиксируем m. Рассмотрим произвольное разбиение $I = \bigcup\limits_{i=1}^{k} I_i$. Пусть $I_i^0 = I_i \setminus \partial I_i$. Положим $A_1 = \{I_i | I_i^0 \cap E_m \neq \emptyset\} \subset \{I_i\}$ и $A_2 = \{I_i | \sup\limits_{x_1,x_2\in I_i} |f(x_1) - f(x_2)| \geqslant \frac{1}{2m}\}$. Если $x \in E_m$ лежит на границе нескольких I_i, то хотя бы на одном из них $\sup\limits_{x_1,x_2\in I_i} |f(x_1) - f(x_2)| \geqslant \frac{1}{2m}$. Таким образом $E_n \subset A_1 \cup A_2$. Предположим теперь, что E_m не является множеством n-мерной меры 0. То есть $\exists(c > 0)$ такое, что для любого покрытия $E_m \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} J_i : \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{Vol}(J_i) > c$. Тогда $\mathrm{Vol}(A_1) + \mathrm{Vol}(A_2) > c$ и

$$S_{\{I_i\}}(f) - s_{\{I_i\}}(f) = \sum_{i=1}^{\infty} \sup_{x_1,x_2\in I_i} |f(x_1) - f(x_2)| \,\mathrm{Vol}(I_i) \geqslant \sum_{I_i\in A_1\cup A_2} \sup_{x_1,x_2\in I_i} |f(x_1) - f(x_2)| \,\mathrm{Vol}(I_i) \geqslant \frac{c}{2m}$$

Так как $\{I_i\}$ – произвольное разбиение, то отсюда следует, что $\inf\limits_{\{I_i\}} S_{\{I_i\}}(f) - \sup\limits_{\{I_i\}} s_{\{I_i\}}(f) \geqslant \frac{c}{2m}$, что противоречит интегрируемости f. Таким образом для любого $m \quad \mu_n(E_m) = 0$. Ввиду $E = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_m$ и согласно задаче 15.1 отсюда следует, что $\mu_n(E) = 0$. □

Теорема 16.2. Пусть $I \subset \mathbb{R}^n$ – параллелепипед, $f : I \to \mathbb{R}^n$ – ограниченная функция, множество точек разрыва которой имеет n-мерную меру Лебега 0. Тогда f интегрируема.

Док-во. Пусть $\varepsilon > 0$. Положим $E_\varepsilon = \{x \in I | \omega(f, x) \geqslant \varepsilon\}$. Тогда E_ε замкнуто, и следовательно, компактно. По условию существует покрытие параллелепипедами $E_\varepsilon \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} I_i$ такое, что $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{Vol}(I_i) < \varepsilon$. Пусть $I_i^\star$ – параллелепипед, полученный из I_i гомотетией в центре I_i с коэффициентом 2. Положим $I_i^0 = I_i^\star \setminus \partial I_i^\star$. Тогда $E_\varepsilon \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} I_i^0$ и ввиду компактности E_ε можно выделить конечное подпокрытие $E_\varepsilon \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} I_i'$ и при этом $\sum\limits_{i=1}^{k} \mathrm{Vol}(I_i') < 2\varepsilon$. Положим $K = I \setminus \left(\bigcup\limits_{i=1}^{k} I_i'\right)$. На компакте K функция f удовлетворяет свойству $\omega(f, x) < \varepsilon$. Согласно лемме 16.1 отсюда следует, что $\exists(\delta > 0)\forall(|x_1 - x_2| < \delta, x_1, x_2 \in K) : |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$. Рассмотрим теперь разбиение $I = \bigcup\limits_{i=1}^{k} J_i$ с диаметром $< \delta$. Переходя к другому более мелкому разбиению, можно считать, что $\{I_i'\}$ – часть $\{J_i\}$. Положим $\{I_i''\} = \{J_i\} \setminus \{I_i'\}$. Тогда

$$S_{\{J_i\}}(f) - s_{\{J_i\}}(f) = \sum_{J_i\in\{I_i'\}} \sup_{x_1,x_2\in J_i} |f(x_1) - f(x_2)| \,\mathrm{Vol}(J_i) + \sum_{J_i\in\{I_i''\}} \sup_{x_1,x_2\in J_i} |f(x_1) - f(x_2)| \,\mathrm{Vol}(J_i) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{J_i\in\{I_i'\}} (\max_{x\in I} f(x) - \min_{x\in I} f(x)) \,\mathrm{Vol}(J_i) + + \sum_{J_i\in\{I_i''\}} 2\varepsilon \,\mathrm{Vol}(J_i) = 2\varepsilon(\max_I f(x) - \min_I f(x) + \mathrm{Vol}(I))$$

Эта величина может быть сколь угодно малой, и следовательно, f – интегрируема. □

Следствие 16.1(Lebesgue criterium). Ограниченная функция на параллелепипеде $I \subset \mathbb{R}^n$ интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда множество её точек разрыва имеет n-мерную меру Лебега 0. (то есть f непрерывна почти всюду)

Следствие 16.2. Пусть $f : I \to \mathbb{R}$ – интегрируема, неотрицательна и $\int\limits_I f dx = 0$. Тогда $f(x) = 0$ почти всюду на I.

Док-во. Предположим, что f непрерывна в $a \in I$ и $f(a) > 0$. Тогда $\exists n$-мерный параллелограмм I', где $f(x) \geqslant c > 0$. Представим $f = f_1 + f_2$, где

$$f_1 = \begin{cases} f(x) \text{ на } I' \\ 0 \text{ на } I \setminus I' \end{cases}$$

$$f_2 = \begin{cases} 0 \text{ на } I' \\ f(x) \text{ на } I \setminus I' \end{cases}$$

Согласно следствию 16.1 и по задаче 15.2 f_1 и f_2 интегрируемы и по теореме 13.2

$$\int\limits_I f dx = \int\limits_I f_1 dx + \int\limits_I f_2 dx \geqslant \int\limits_I f_1 dx \geqslant c \operatorname{Vol}(I') > 0$$

Это противоречие доказывает, что $f(x) = 0$ во всех точках, где f непрерывна. Согласно, следствию 16.1 f непрерывна (и значит равна нулю) почти всюду на I. $\square$

§17 Несобственные интегралы.

Определение. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ и $f : E \to \mathbb{R}$ ограничена. Говорят, что f интегрируема, если интегрируема функция $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$, где $I \supset E$ – параллелепипед и $\tilde{f} = \begin{cases} f(x) \text{ при } x \in E \\ 0 \text{ при } x \in I \setminus E \end{cases}$. В этом случае $\int\limits_E f dx \equiv \int\limits_I \tilde{f} dx$.

Определение. Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется измеримым, если оно ограничено и $\mu(E) = \int\limits_E 1 dx$ существует.

Задача 17.1. Пусть E – измеримое множество. Тогда $\forall(\varepsilon > 0)\exists$(параллелепипеды $I_1, \ldots, I_k$) : $\partial E \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} I_i$ и $\sum\limits_{i=1}^{k} \operatorname{Vol}(I_i) < \varepsilon$.

Определение. Исчерпанием множества $E \subset \mathbb{R}^n$ называется последовательность измеримых множеств $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E$ такое, что $\cup E_i = E$.

Задача 17.2. Если $\{E_i\}$ – исчерпание измеримого множества E, то $\mu(E) = \lim \mu(E_i)$.

Задача 17.3. Если $\{E_i\}$ – исчерпание измеримого множества E и $f : E \to \mathbb{R}$ – интегрируема. Тогда $f|_{E_i}$ интегрируемы при всех i и $\int\limits_E f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{E_n} f(x)dx$.

Определение. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ и $f : E \to \mathbb{R}$(возможно неограничена). Говорят, что f интегрируема на E (имеет несобственный интеграл по множеству E), если

1) Существует исчерпание множества E измеримыми множествами $\{E_i\}$ такое, что $f|_{E_i}$ ограничены и интегрируемы при всех i и $\lim\limits_{i\to\infty} \int\limits_{E_i} f(x)dx$ существует.

2) Этот предел одинаков для всех таких исчерпаний. В этом случае $\int\limits_E f dx = \lim\limits_{i\to\infty} \int\limits_{E_i} f(x)dx$ называется несобственным интегралом f на E.

Лемма 17.1. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n, f : E \to \mathbb{R}$ неотрицательна и $\{E_i^k\}_{k=1,2}$ – исчерпания E измеримыми множествами такие, что $f|_{E_i^k}$ интегрируемы при всех i и $A_k = \lim\limits_{i\to\infty} \int\limits_{E_i^k} f dx$ существует. Тогда $A_1 = A_2$.

Док-во. Положим $F_{\alpha\beta} = E_\alpha^1 \cap E_\beta^2$. Множества $\{F_{\alpha 1}, F_{\alpha 2}, \ldots\}$ образуют исчерпание E_α^1. Согласно задаче 17.3

$$\int\limits_{E_\alpha^1} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{F_{\alpha n}} f dx \leqslant \lim_{n\to\infty} \int\limits_{E_n^2} f dx \leqslant \int\limits_{E^2} f dx$$

Таким образом $\int\limits_{E^1} f dx \leqslant \int\limits_{E^2} f dx$. Противоположное неравенство доказывается аналогично. $\square$

Пример 17.1.

$$\int\limits_1^{+\infty} x^{-2} dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_1^n x^{-2} dx = \lim_{n\to\infty} -(\frac{1}{n} - 1) = 1$$

Теорема 17.1. Пусть $f, g : E \to \mathbb{R}$ причём f и g ограничены и интегрируемы на одних и тех же измеримых подмножествах E. Тогда, если $|f(x)| \leqslant g(x)$ на E и g интегрируема на E, то $|f(x)|$ и $f(x)$ тоже интегрируемы на E.

Док-во. Пусть $\{E_n\}$ – измеримое исчерпание, на котором f и g интегрируемы. Тогда по критерию Лебега $|f|$ тоже интегрируема на $\{E_n\}$ и

$$0 \leqslant \int\limits_{E_{n+k}} |f|dx - \int\limits_{E_k} |f|dx = \int\limits_{E_{n+k}\setminus E_k} |f|dx \leqslant \int\limits_{E_{n+k}\setminus E_k} gdx = \int\limits_{E_{n+k}} gdx - \int\limits_{E_n} gdx$$

По условию последовательность $\int\limits_{E_n} gdx$ сходится, следовательно, удовлетворяет критерию Коши. Таким образом, последовательность $\int\limits_{E_n} |f|dx$ тоже удовлетворяет критерию Коши, и значит, сходится. Таким образом, согласно лемме 17.1 $|f|$ интегрируема на E. Положим $f_+ = \frac{1}{2}(|f| + f), f_- = \frac{1}{2}(|f| - f)$. Ввиду $0 \leqslant f_\pm \leqslant |f|$, f_+ и f_- тоже интегрируемы на E. Следовательно, $f = f_+ - f_-$ – тоже интегрируема. □

Задача 17.4. Доказать, что $\int\limits_E (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)dx = \lambda_1 \int\limits_E f_1 dx + \lambda_2 \int\limits_E f_2 dx$ и $\int\limits_{E_1 \cup E_2} f dx = \int\limits_{E_1} f dx + \int\limits_{E_2} f dx$, если $E_1 \cap E_2 = \emptyset$.

§18 Разбиение единицы. Замена переменных в интеграле.

Лемма 18.1. Пусть $A, B \subset \mathbb{R}^n$ такие, что $A \cap B = \emptyset, A$ – компакт, B – замкнуто. Тогда $\exists \varphi \in C^\infty, \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такая, что $\varphi(x) = 1$ на A и $\varphi(x) = 0$ на B.

Док-во. Пусть $0 < a < b$.

$$\text{Положим } f(x) = \begin{cases} \exp(\frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-a}) \text{ при } a < x < b \\ 0 \text{ при } x \geqslant b \text{ и } x \leqslant a \end{cases}$$

$$F(x) = \left(\int\limits_x^b f(t)dt\right) \Bigg/ \int\limits_a^b f(t)dt \qquad \psi(x^1, \ldots, x^n) = F\left(\sum_{i=1}^n (x^i)^2\right)$$

Тогда $|\psi(x)| \leqslant 1$ и $\psi(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } |x| \leqslant \sqrt{a} \\ 0 \text{ при } |x| \geqslant \sqrt{b} \end{cases}$. Ввиду замкнутости B для $\forall (x \in A) \exists (\delta > 0) : B(x, \delta) \subset \mathbb{R}^n \setminus B$. Используя компактность A, найдём шары $U_1, \ldots, U_k \subset \mathbb{R}^n \setminus B$ такие, что $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^k U_i$. Для каждого U_i рассмотрим $\psi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такое, что $\psi_i = \begin{cases} 1 \text{ на } U_i \\ 0 \text{ на } B \end{cases}$. Положим $\varphi(x) = 1 - \prod\limits_{i=1}^k (1 - \psi_i(x))$. Тогда $\varphi(x) = \begin{cases} 1 \text{ на } A \\ 0 \text{ на } B \end{cases}$. □

Теорема 18.1(о разбиении единицы). Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ – компакт и $M \subset \bigcup\limits_{i=1}^k U_i$, где U_i – открытые шары. Тогда существуют $g_1, \ldots, g_k : M \to \mathbb{R}, g_i \in C^\infty$ такие, что $0 \leqslant g_i \leqslant 1, g_i(x) = 0$ вне U_i и $\sum\limits_{i=1}^k g_i(x) = 1$ на M.

Док-во. Рассмотрим набор $V_1, \ldots, V_k$, где $M \subset \bigcup\limits_{i=1}^k V_i$ и $\overline{V_i} \subset U_i$. Согласно лемме 18.1, существуют $\psi_i \in C^\infty$ такие, что $\psi_i(x) \geqslant 0$ и $\psi_i = \begin{cases} 1 \text{ на } \overline{V_i} \\ 0 \text{ вне } U_i \end{cases}$. Положим $\psi(x) = \sum\limits_{i=1}^k \psi_i(x)$ и $g_i(x) = \psi_i(x)/\psi(x)$. □

Теорема 18.2. Пусть $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченные открытые множества и $\varphi : D_1 \to D_2$ – диффеоморфизм. Пусть $f : D_2 \to \mathbb{R}$ – непрерывна на D_2 и равна 0 вне D_2. Тогда

$$\int\limits_{D_2} f(x)dx = \int\limits_{D_1} f(\varphi(t)) \det(d\varphi(t))dt$$

Лемма 18.2. Теорема 18.2 верна, если φ – простейший диффеоморфизм.

Док-во. Можно считать, что $\varphi^i(x_i) = x^i$ при $i > 1$. По теореме Фубини и формуле замены переменной в одномерном случае имеем:

$$\int\limits_{D_2} f dx = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x^1, \ldots, x^n) dx^1 \right) dx^2 \cdots dx^n =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x^1(t), x^2, \ldots, x^n) \det(d\varphi(t)) dt^1 \right) dx^2 \cdots dx^n = \int\limits_{D_1} f(t^1, \ldots, t^n) \det(d\varphi(t)) dt^1 \ldots dt^n$$

□

Лемма 18.3. Если теорема верна для диффеоморфизмов $\varphi_1 : D_1 \to D_2$ и $\varphi_2 : D_2 \to D_3$, то она верна и для диффеоморфизма $\varphi_2 \circ \varphi_1 : D_1 \to D_3$.

Док-во. Согласно теореме 5.4 $d(\varphi_2 \circ \varphi_1) = d\varphi_2 \cdot d\varphi_1$. Поэтому

$$\int\limits_{D_3} f(x)dx = \int\limits_{D_2} f(\varphi_2(t)) \det(d\varphi_2(t))dt =$$

$$= \int\limits_{D_1} f(\varphi_2(\varphi_1(s))) \det(d\varphi_2(t(s))) \cdot \det(d\varphi_1(s))ds = \int\limits_{D_1} f(\varphi_2(\varphi_1(s))) \det(d\varphi_2(\varphi_1(s)))ds$$

□

Док-во. теоремы 18.2
Согласно, лемме 10.1 $\forall (t \in D_1)$ существует окрестность $U_t \ni t$, где φ разлагается в композицию простейших. Ввиду компактности для $\overline{D_1}$ существует конечное покрытие $D_1 \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} U_i$ такими U_i. Согласно теореме 18.1 существуют $g_1, \ldots, g_k : \overline{D_1} \to \mathbb{R}, g_i \in C^\infty, g_i(x) = 0$ вне U_i и $\sum\limits_{i=1}^{k} g_i(x) = 1$ на $\overline{D_1}$. Согласно леммам 18.2 и 18.3 теорема выполняется на каждом U_i. Поэтому

$$\int\limits_{D_2} f(x)dx = \int\limits_{D_2} \left(\sum_{i=1}^{k} g_i(x) \right) f(x)dx = \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{D_2} g_i(x)f(x)dx = \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{U_i} g_i(x)f(x)dx = \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{\varphi(U_i)}$$

$$g_i(x(t))f(x(t)) \det(d\varphi(t))dt = \int\limits_{\bigcup\limits_{i=1}^{k} \varphi(U_i)} \sum_{i=1}^{k} g_i(x(t))f(x(t)) \det(d\varphi(t))dt = \int\limits_{D_1} f(x(t)) \det(d\varphi(t))dt$$

□

Задача 18.1. Доказать, что теорема 18.2 остаётся верной для всех остальных интегрируемых функций, а также, для несобственных интегралов по множеству $E \subset \mathbb{R}^n$.

§19 Интегралы, зависящие от параметра.

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n, T \subset \mathbb{R}^k$. Функцию $f : X \times T \to \mathbb{R}$ можно рассматривать как семейство функций на X, зависящих от параметра $t \in T$. $f_t(x) = f(x,t)$. Пусть t_0 – конечная или бесконечная предельная точка множества T.

Определение. Говорят, что $f_t(x)$ сходится к $f(x)$ равномерно при $t \to t_0$, если $\forall(\varepsilon > 0)$ существует окрестность $T \supset U$ точки t_0 такая, что при $t \in U : |f_t(x) - f(x)| < \varepsilon$ для любых x.

Теорема 19.1(Cauchy criterium). Для того, чтобы семейство функций $f_t(x)$ равномерно сходилось к некоторой функции при $t \to t_0$ необходимо и достаточно, чтобы $\forall(\varepsilon > 0)$ существовала окрестность $T \supset U$ точки t_0 такая, что $\forall(x \in X)\forall(t_1, t_2 \in U) : |f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x)| < \varepsilon$.

Док-во. Если $f_t(x)$ сходится равномерно к $f(x)$, то существует окрестность U_δ точки t_0 такая, что $|f_t(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $t \in U$. Но тогда для любых $t_1, t_2 \in U, |f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x)| < \varepsilon$.

Пусть теперь, описанный в теореме, критерий выполнен. Тогда, согласно критерию Коши функция $f(x) = \lim\limits_{t \to t_0} f_t(x)$ существует. Пусть $\varepsilon > 0$ и U – окрестность такая, что $|f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x)| < \varepsilon$ при всех $x \in X$ и $t_1, t_2 \in U$. Тогда $|f_{t_1}(x) - f(x)| = \lim\limits_{t \to t_0} |f_{t_1}(x) - f_{t_2}(x)| \leqslant \varepsilon$. □

Теорема 19.2. Пусть $f_t(x)$ – непрерывна (на X) и равномерно сходится к $f(x)$ при $t \to t_0$. Тогда $f(x)$ – непрерывна.

Док-во. Пусть $x_0 \in X, \varepsilon > 0$ и $T \supset U$ окрестность t_0 такая, что $|f_t(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ при $\forall(x \in X, t \in U)$. Пусть $t' \in U$ и V – окрестность x_0 такая, что $|f_{t'}(x) - f_{t'}(x_0)| < \varepsilon/3$ при $x \in V$. Тогда $|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_{t'}(x) + f_{t'}(x) - f_{t'}(x_0) + f_{t'}(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$. □

Задача 19.1. Если последовательность функций непрерывных на компакте монотонно сходится к непрерывной функции, то сходится равномерно. В частности, $f_n(x) = n(1 - x^{1/n})$ при $n \to \infty$ равномерно сходится к $\ln \frac{1}{x}$ на промежутке $[a,b] \subset (0,1)$.

Теорема 19.3. Пусть семейство интегрируемых ограниченных на X функций $f_t(x)$ равномерно сходится к $f(x)$ при $t \to t_0$. Тогда $f(x)$ интегрируема на X и $\int\limits_X f(x)dx = \lim\limits_{t \to t_0} \int\limits_E f_t(x)dx$.

Док-во. Пусть $\varepsilon > 0$ и U – окрестность t_0 такая, что $|f_t(x) - f(x) < \frac{\varepsilon}{3\,\mathrm{Vol}(X)}$ при $\forall(x \in X, t \in U)$. Пусть $t' \in U$ и $\{I_\alpha\}$ – покрытие X такое, что $S_{\{I_\alpha\}}(f_{t'}) - s_{\{I_\alpha\}}(f_{t'}) < \frac{\varepsilon}{3}$. Тогда

$$\begin{aligned} S_{\{I_\alpha\}}(f) - s_{\{I_\alpha\}}(f) &= \big(S_{\{I_\alpha\}}(f) - S_{\{I_\alpha\}}(f_{t'})\big) + \big(S_{\{I_\alpha\}}(f_{t'}) - s_{\{I_\alpha\}}(f_{t'})\big) + \big(s_{\{I_\alpha\}}(f_{t'}) - s_{\{I_\alpha\}}(f)\big) \leqslant \\ &\leqslant \sup_{x \in X} |f(x) - f_{t'}(x)| \cdot \mathrm{Vol}(X) + \big(S_{\{I_\alpha\}}(f_{t'}) - s_{\{I_\alpha\}}(f_{t'})\big) + \sup_{x \in X} |f(x) - f_{t'}(x)| \cdot \mathrm{Vol}(X) < \varepsilon \end{aligned}$$

То есть $\int f(x)dx$ существует. Но тогда при $t \in U$ $\left|\int\limits_X f(x)dx - \int\limits_X f_t(x)dx\right| \leqslant \int\limits_X |f(x) - f_t(x)|dx \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$.
То есть $\lim\limits_{t \to t_0} \int\limits_X f_t(x)dx = \int\limits_X f(x)dx$. □

Теорема 19.4. Пусть $I = \{(x,y) | x \in I_x \subset \mathbb{R}^n, y \in I_y \subset \mathbb{R}\}$ – замкнутый параллелепипед. $f : I \to \mathbb{R}$ – непрерывна, $\frac{\partial f}{\partial y}$ существует и непрерывна. Тогда $F(y) = \int\limits_{I_x} f(x,y)dx$ принадлежит C^1 и $F'(y) = \int\limits_{I_x} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$.

Док-во. По теореме Лагранжа

$$\begin{aligned} \left|F(y_0 + h) - F(y_0) - \left(\int\limits_{I_x} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)dx\right)\right| &\leqslant \int\limits_{I_x} \left|f(x, y_0 + h) - f(x, y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)h\right| dx \leqslant \\ &\leqslant \left(\int\limits_{I_x} \sup_{0<\theta<1} \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0 + \theta h) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)\right| dx\right) |h| \end{aligned}$$

Согласно теореме 19.3 и задаче 19.1:

$$\left|F' - \int\limits_{I_x} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx\right| = \lim_{h\to 0}\left|\frac{F(y_0+h)-F(y_0)}{h} - \int\limits_{I_x}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)dx\right| =$$

$$= \lim_{h\to 0}\int\limits_{I_x} \sup_{0<\theta<1} |\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0+\theta h) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)|dx = 0$$

□

Займёмся теперь несобственным интегралом $f: I \to \mathbb{R}$, где $I = \{(x,y)|a \leqslant x < b, c \leqslant y \leqslant d\}$ и $b \in \mathbb{R}$ или $b = \infty$.

Определение. Говорят, что $F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$ равномерно сходится на $[c,d]$, если для любого $a \leqslant t < b$ интеграл $F_t(y) = \int\limits_a^t f(x,y)dx$ существует и функции $F_t(y)$ равномерно сходятся при $t \to b$. Аналогично, определяется равномерная сходимость для $\int\limits_a^b f(x,y)dx$, где $a < x \leqslant b$.

Задача 19.2. Для равномерной сходимости необходимо и достаточно, чтобы $\forall(\varepsilon > 0)\exists(\delta > 0)\forall(t_1,t_2 \in (b-\delta,b)) : |\int\limits_{t_1}^{t_2} f(x,y)dx| < \varepsilon$ при всех y.

Задача 19.3. Если $|f(x,y)| \leqslant g(x,y)$ и $\int\limits_a^b g(x,y)dx$ сходится равномерно на Y, то $\int\limits_a^b f(x,y)dx$ тоже сходится равномерно на Y.

Задача 19.4. Доказать, что для несобственных, равномерно сходящихся, интегралов верны теоремы 19.2,19.3, и если потребовать равномерную сходимость $\int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}dx$, то верна и теорема 19.4.

§20 Γ и B функции Эйлера.

Положим $\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$, где $\alpha > 0$.

Лемма 20.1. Функция $\Gamma(\alpha)$ бесконечно дифференцируема и $\Gamma^{(n)}(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\ln^n xe^{-x}dx$

Док-во. Пусть $0 < a \leqslant \alpha$. Тогда $\lim\limits_{x\to+0}\frac{|x^{\alpha-1}\ln^n x|}{x^{\frac{a}{2}-1}} = \lim\limits_{x\to+0}|x^{\alpha-\frac{a}{2}}\ln^n x| = 0$. Следовательно $\exists(c)$ $\forall(0 < x \leqslant c) : |x^{\alpha-1}\ln^n xe^{-x}| < x^{\frac{a}{2}-1}$. Значит согласно задаче 19.3 $\int\limits_0^c x^{\alpha-1}\ln^n xe^{-x}dx$ сходится равномерно на $\alpha \in [a,+\infty)$. Пусть $\alpha \leqslant b < \infty$. Тогда $|x^{\alpha-1}\ln^n xe^{-x}| \leqslant x^{b-1}|\ln^n x|e^{-x}$ при $x \geqslant 1$. Поэтому $\int\limits_c^{+\infty} x^{\alpha-1}\ln^n xe^{-x}dx$ сходится равномерно на $\alpha \in (0,b]$. Значит $\int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\ln^n xe^{-x}dx$ равномерно сходится на $[a,b]$, где $[a,b]$ - любой отрезок. Далее используем задачу 19.4. □

Лемма 20.2. $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ и $\Gamma(n) = (n-1)!$ при целых n.

Док-во. Интегрируем по частям $\Gamma(\alpha+1) = -x^\alpha e^{-x}|_0^{+\infty} + \alpha\int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx = \alpha\Gamma(\alpha)$. Кроме того $\Gamma(1) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}|_0^{+\infty} = 1$. □

Положим $B(\alpha,\beta) = \int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$. Она определена при $\alpha,\beta > 0$ и $B(\alpha,\beta) = B(\beta,\alpha)$.

Лемма 20.3. $B(\alpha,\beta) = \frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-1}B(\alpha-1,\beta)$, $B(\alpha,n) = \frac{(n-1)!}{(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}$, $B(m,n) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(n+m-1)!}$, если n и m – целые.

Док-во. Интегрируем по частям

$$B(\alpha,\beta) = -\frac{1}{\beta}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta}\Big|_0^1 + \frac{\alpha-1}{\beta}\int\limits_0^1 x^{\alpha-2}(1-x)^{\beta}dx =$$

$$= \frac{\alpha-1}{\beta}\int\limits_0^1 x^{\alpha-2}((1-x)^{\beta-1}-(1-x)^{\beta-1}x)dx = \frac{\alpha-1}{\beta}B(\alpha-1,\beta) - \frac{\alpha-1}{\beta}B(\alpha,\beta)$$

Кроме того $B(\alpha,1) = \frac{1}{\alpha}$. □

Лемма 20.4. $\Gamma(\alpha) = \lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha}\frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}$.

Док-во. Сделаем замену $x = \ln\frac{1}{u}$ и используем задачи 19.1,19.4. Тогда $\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^1 \ln^{\alpha-1}(\frac{1}{u})du = \lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha-1}\int\limits_0^1(1-u^{\frac{1}{n}})^{\alpha-1}du$. Сделаем замену $n = v^n$ и используем лемму 20.3. $n^{\alpha-1}\int\limits_0^1(1-u^{\frac{1}{n}})^{\alpha-1}du = n^{\alpha}\int\limits_0^1 v^n(1-v)^{\alpha-1}dv = n^{\alpha}B(n,\alpha) = n^{\alpha}\frac{(n-1)!}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}$. □

Задача 20.1. Доказать $B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.

Задача 20.2. Доказать, что $F(\alpha,\beta,\gamma,1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}$, где F — гипергеометрическая функция.