Математический анализ, 1 курс, весна 1998

С. В. Дужин (duzhin@botik.ru)

Листовка No. 1, 10.02.1998

1. Существует ли многочлен $f \in \mathbb{R}[x,y]$, принимающий на плоскости положительные, но сколь угодно малые значения (т.е. такой, что $f(x,y) > 0$ для всех $x, y \in \mathbb{R}$ и $\inf\limits_{x,y\in\mathbb{R}} f(x,y) = 0$)?

2. Какие из следующих функций можно доопределить таким образом, чтобы они стали непрерывны в точке $(0,0)$: $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $\frac{x^3-y^3}{x^4+y^4}$, $e^{-\frac{1}{|x-y|}}$, $|x|^y$, $|x|^{1/|y|}$?

3. Функция $f(x,y)$ имеет нулевой предел, когда точка (x,y) стремится к $(0,0)$ вдоль любой прямой. Вытекает ли отсюда, что функция $f(x,y)$ непрерывна в точке $(0,0)$?

4. Двойная последовательность — это отображение $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$. Число a называется пределом двойной последовательности a_{mn},

$$\lim_{m,n\to\infty} a_{mn} = a,$$

если для всякого $\varepsilon > 0$ существует номер $K \in \mathbb{N}$ такой что $|a_{mn} - a| < \varepsilon$, если $m > K$ и $n > K$.

a. Привести пример последовательности, для которой

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} a_{mn} \neq \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} a_{mn}.$$

b. Верно ли, что если повторные пределы существуют и равны,

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} a_{mn} = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} a_{mn}.$$

то существует и предел двойной последовательности $\lim_{m,n\to\infty} a_{mn}$?

c. Может ли так случиться, что двойной предел $\lim_{m,n\to\infty} a_{mn}$ существует, но ни при каком фиксированном m последовательность a_{mn} не имеет предела при $n \to \infty$?

5. Существует ли функциональная зависимость между следующими 6 функциями 6 вещественных переменных: $x_1^2 + y_1^2$, $x_2^2 + y_2^2$, $x_3^2 + y_3^2$, $x_1x_2 + y_1y_2$, $x_1x_3 + y_1y_3$, $x_3x_2 + y_3y_2$?

6. Докажите, что следующие две системы уравнений равносильны:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 1, \\ y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 &= 1, \\ z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 &= 1, \\ x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 &= 0, \\ x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3 &= 0, \\ y_1z_1 + y_2z_2 + y_3z_3 &= 0, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 &= 1, \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 &= 1, \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 &= 1, \\ x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 &= 0, \\ x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3 &= 0, \\ x_2x_3 + y_2y_3 + z_2z_3 &= 0. \end{aligned}$$

7. Функция $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ называется *однородной степени* k, если $f \circ H_\lambda = \lambda^k f$, где $H_\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — гомотетия с коэффициентом λ и центром в начале координат. Докажите теорему Эйлера: *функция f однородна степени k тогда и только тогда, когда она удовлетворяет дифференциальному уравнению $X(f) = kf$, где $X = \partial/\partial x_1 + \ldots + \partial/\partial x_n$ — радиальное векторное поле.*

8. Пусть $f(x_1,\ldots,x_n) = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{(2-n)/2}$. Проверьте, что $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0$. Каков правильный аналог этой функции для $n = 2$?

9. Пусть $f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. Сосчитайте $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ в точке $(0,0)$.