Математический анализ, 1 курс, весна 1998

С. В. Дужин (duzhin@botik.ru)

Листовка No. 2 — 17.02.1998

1. (a) Докажите, что всякое открытое множество на вещественной прямой есть объединение интервалов $\cup(a_i, b_i)$.

(b) *Длиной* (конечной или бесконечной) такого множества назовем сумму $\sum(b_i - a_i)$. Существует ли открытое множество длины меньше 1, содержащее все (i) рациональные, (ii) иррациональные точки отрезка $[0,1]$?

2. (a) Приведите пример метрического пространства из 4 точек, которое нельзя представить как подпространство (i) $\mathbb{R}^2$, (ii) $\mathbb{R}^3$.

(b) Найдите необходимые и достаточные условия, чтобы 6 чисел являлись расстояниями между 4 точками в $\mathbb{R}^3$.

3. (a) Проверьте, что каждая из следующих формул задает метрику в $\mathbb{R}^n$:

$$(x,y) \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}, \quad (x,y) \mapsto \max_{1\le i\le n}|x_i - y_i|, \quad (x,y) \mapsto \sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i|.$$

(b) Нарисуйте сферы и шары для этих метрик на плоскости.

(c) Придумайте однопараметрическое семейство метрик, включающее в себя три предыдущих в виде частных стучаев. Как выглядит соответствующее семейство "сфер" на плоскости?

(d) Докажите, что любые две из указанных выше метрик эквивалентны между собой в том смысле, что существуют положительные константы C_1, C_2 такие, что для любой пары точек x и y выполняются соотношения $\rho_1(x,y) < C_1\rho_2(x,y)$ и $\rho_2(x,y) < C_2\rho_1(x,y)$.

(e) Придумайте на плоскости метрику, которая не входит в найденное выше семейство, но эквивалентна всем входящим в нее метрикам.

4. Является ли следующая величина метрикой на множестве всех компактных подмножеств плоскости:

$$\rho(\Phi_1, \Phi_2) = \sup_{A\in\Phi_1}\inf_{B\in\Phi_2}|AB|$$

($|AB|$ — евклидова длина отрезка AB)?

5. Обозначим через $\operatorname{Int} A$ множество внутренних точек множества $A \subset \mathbb{R}^n$.

(a) Докажите, что $\operatorname{Int}\operatorname{Int} A = \operatorname{Int} A$.

(b) Правда ли, что для любых двух множеств A и B справедливы равенства (i) $\operatorname{Int}(A\cup B) = \operatorname{Int} A \cup \operatorname{Int} B$, (ii) $\operatorname{Int}(A\cap B) = \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$?

6. Обозначим через $\operatorname{Cl} A$ замыкание множества A. Существует ли такое множество $A \subset \mathbb{R}$, что

(a) A, $\operatorname{Cl} A$, $\operatorname{Int} A$, $\operatorname{Cl}\operatorname{Int} A$ попарно различны?

(b) A, $\operatorname{Cl} A$, $\operatorname{Int} A$, $\operatorname{Int}\operatorname{Cl} A$ попарно различны?

(c) A, $\operatorname{Cl} A$, $\operatorname{Int} A$, $\operatorname{Cl}\operatorname{Int} A$, $\operatorname{Int}\operatorname{Cl} A$ попарно различны?

7. (a) Докажите, что для любого множества $A \subset \mathbb{R}$ выполняется равенство $\operatorname{Cl}\operatorname{Int}\operatorname{Cl}\operatorname{Int} A = \operatorname{Cl}\operatorname{Int} A$.

(b) (*Задача Куратовского.*) Какое наибольшее число различных множеств может получиться из одного $A \subset \mathbb{R}$ при помощи операций Int и Cl?

8. (*Задача А. А. Кириллова.*) Какое наибольшее число различных множеств может получиться из одного $A \subset \mathbb{R}$ при помощи операций замыкания и дополнения?