Математический анализ, 1 курс, весна 1998

С. В. Дужин, С. В. Чмутов (duzhin@botik.ru)

Листовка No. 3 — 24.02.1998

1. Является ли функция $f(x,y)$ дифференцируемой в точке $(0,0)$, если

(a) $f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$?

(b) $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$?

(c) $f(x,y)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & \text{при } x^2+y^2>0, \\ 0 & \text{при } x^2+y^2=0? \end{cases}$

2. *Градиентом* функции $f(x,y)$ называется векторное поле на плоскости

$$\operatorname{grad} f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Изобразить поле направлений градиента следующих функций:

(a) $f(x,y)=x^2+y^2$,

(b) $f(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$,

(c) $f(x,y)=\arcsin e^{-\operatorname{tg}\sqrt[3]{\ln(xy+1)}}$.

3. Стороны треугольника $a=200\pm 2$, $b=300\pm 5$, угол между ними $\gamma=60^\circ\pm 1^\circ$. Используя линейное приближение, найти примерную оценку погрешности, с которой эти данные позволяют определить длину третьей стороны треугольника.

4. Найти матрицы Якоби следующих отображений:

(a) $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ — инверсия относительно окружности $x^2+y^2=1$.

(b) $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ — проекция на плоскость $z=0$ прямыми, проходящими через точку $(0,0,1)$.

(c) $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ — отображение, заданное комплексным многочленом $z\mapsto z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n$ (вещественная плоскость $\mathbb{R}^2$ естественно отождествляется с комплексной прямой $\mathbb{C}$: $z=x+iy$).

(d) $\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ — отображение, переводящее матрицу 2×2 в ее квадрат.

(e) $\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ — отображение, переводящее матрицу 2×2 в обратную к ней матрицу.

5. Рассмотрим отображение $f:\mathbb{C}_z\to\mathbb{C}_w$, заданное функцией $z\mapsto w=z^2+2\overline{z}$.

(a) На плоскости $\mathbb{R}^2=\mathbb{C}_z$ нарисовать кривую вырождения его якобиана (Γ).

(b) На этой кривой изобразить поле ядер дифференциала df.

(c) На плоскости $\mathbb{R}^2=\mathbb{C}_w$ нарисовать образ кривой Γ.