Математический анализ, 1 курс, весна 1998

С. В. Дужин, С. В. Чмутов
(duzhin@botik.ru, chmutov@botik.ru)

Листовка No. 4 — 03.03.1998

1. Найти выражение для частных производных следующих функций:

(a) $F(x, y) = f(g(x)h(y), g(x) + h(y))$.

(b) $F(x, y, z) = f(g(x + y), h(x + z))$.

(c) $F(x, y, z) = f(x/y, y/z, z/x)$.

2. Рассмотрим в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ двумерные плоскости $\mathbb{R}^2_1 = \{z = 1\}$, $\mathbb{R}^2_2 = \{z = 2\}$, $\mathbb{R}^2_3 = \{z = 3\}$ и отображения $f : \mathbb{R}^2_1 \to \mathbb{R}^2_2$, $g : \mathbb{R}^2_2 \to \mathbb{R}^2_3$, заданные центральной проекцией из точек $(0, 0, 0)$ и $(0, 0, 1)$ соответственно. Найти матрицу Якоби данных двух отображений, матрицу Якоби их композиции и проверить цепное правило в данном примере.

3. Найти матрицу Якоби указанной ветви отображения f^{-1} в указанной точке, если

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — отображение, заданное комплексным многочленом $z \mapsto w = z^3 - 2z$ (вещественная плоскость $\mathbb{R}^2$ естественно отождествляется с комплексной прямой $\mathbb{C}$: $z = x + iy$). Точка $w = -1$. Ветвь такая, что $f^{-1}(-1) = 1$.

(b) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ — отображение, переводящее матрицу 2×2 в ее квадрат. Точка — единичная матрица E. Рассматривается ветвь обратного отображения, переводящая E в E.

(c) Можно ли, в условиях предыдущего примера, найти матрицу Якоби той ветви отображения f^{-1}, которая переводит единичную матрицу E в матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$?

4. Выписать разложение в ряд Тейлора до второго порядка следующих функций в окрестности данной точки:

(a) $f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 2y + 5$ в окрестности точки $(1, -2)$.

(b) $f(x, y) = x^y$ в окрестности точки $(1, 1)$.

(c) $f(x, y) = \sin(x + y + z)$ в окрестности точки $(1, 0, -1)$.

(d) $f(x, y) = \int_0^1 (1 + x)^{t^2 y} dt$ в окрестности точки $(0, 0)$.

(e) Ветви функции $z(x, y)$, заданной неявно уравнением $z^3 - 2xz + y = 0$ и начальным условием $z(1, 1) = 1$ в окрестности точки $(1, 1)$.

5. Найти число, расположение и тип критических точек следующих функций:

(a) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$.

(b) $f(x, y) = \cos(x - y) - \cos(x) - \cos(y)$ (число критических точек на периоде).

(c) $f(x, y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$.

6. $f : \mathbb{R}^2_{x,y} \to \mathbb{R}^2_{u,v}$ — отображение, заданное в окрестности точек $(1, 1) \in \mathbb{R}^2_{x,y}$ и $(1, 1) \in \mathbb{R}^2_{u,v}$ неявно соотношениями $ux + vy + x^3 = 3$, $vx - uy + u^3 = 1$, $f(1, 1) = (1, 1)$. Найти матрицу Якоби f и f^{-1} в указанной точке.

7. Пусть $\mathbb{R}^{n^2}$ — пространство матриц размера $n \times n$ и $\Delta : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ — определитель.

(a) Найдите дифференциал функции Δ.

(b) Найдите разложение функции Δ в ряд Тейлора в окрестности нулевой матрицы.

(c) Найдите разложение функции Δ в ряд Тейлора в окрестности единичной матрицы.