Математический анализ, 1 курс, весна 1998

С. В. Дужин, С. В. Чмутов

(duzhin@botik.ru, chmutov@botik.ru)

Листовка No. 6 — 31.03.1998

Издание 2-е, переработанное и дополненное

1. Докажите следующие неравенства, исследуя условный экстремум подходящей функции на подходящем многообразии:

(a)
$$\frac{x^n+y^n}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^n \quad \text{при} \quad n \geq 1;\ x, y \geq 0.$$

(b) Неравенство Гельдера

$$\sum_{i=1} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{1/q},$$

если $x_i \geq 0$, $y_i \geq 0$, $p, q > 0$, $1/p + 1/q = 1$.

2. (*"Математический тривиум" 8.*) Сколько максимумов, минимумов и седел имеет функция $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 + x_5^4$ на поверхности, заданной соотношениями $x_1 + \ldots + x_5 = 0$, $x_1^2 + \ldots + x_5^2 = 1$, $x_1^3 + \ldots + x_5^3 = C$?

3. По единичной сфере свободно движутся 4 точки с одинаковвым зарядом, отталкиваясь друг от друга по закону Кулона (т.е. стремясь минимизировать сумму обратных расстояний $\sum_{i\neq j} 1/r_{ij}$). Будет ли устойчивым равновесие, при котором (a) точки расположены в вершинах правильного тетраэдра? (b) точки лежат в вершинах квадрата, вписанного в большой круг?

4. Вычислить кратные интегралы:

(a) $\iint x^2y^2\,dx\,dy$ по квадрату $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$.

(b) $\iiint xyz\,dx\,dy\,dz$ по симплексу $x+y+z \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

(c) $\displaystyle\iint \frac{x^3+y^3-3xy(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,dx\,dy$ по кругу $x^2+y^2 \leq 1$.

(d) $\iint e^{(y-x)/(y+x)}\,dx\,dy$ по треугольнику с вершинами $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$.

(e) $\iiint dx\,dy\,dz$ по внутренности эллипсоида с полуосями a, b, c.

5. (*"Математический тривиум" 16.*) Какую долю от объема пятимерного куба составляет объем вписанного в него шара? А от десятимерного?

6. (*"Математический тривиум" 17.*) Найти расстояние от центра тяжести однородного 100-мерного полушара радиуса 1 до центра шара с относительной погрешностью 10%.

7. Доказать, что $\left|\iint (u_x^2+u_y^2)\,dx\,dy\right|$ не изменяется при инверсии.