Математический анализ, 1 курс, весна 1998

С. В. Дужин, С. В. Чмутов

(duzhin@botik.ru, chmutov@botik.ru)

Листовка No. 7 — 21.04.1998

1. Определение Γ-функции: $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt$.

(a) Докажите, что $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

(b) Найдите $\Gamma(1)$ и $\Gamma(\frac{1}{2})$ и, используя п. (a), выведите формулы для значений Γ-функции в целых и полуцелых точках.

2. Вычислите интеграл $\int_0^\infty x^n e^{-x^2}\, dx$ двумя способами:

(a) Заменой переменной сведите его к значению Γ-функции.

(b) Дифференцированием по параметру a интеграла $I_n(a) = \int_0^\infty x^n e^{-ax^2}\, dx$.

3. Докажите:

(a) Формулу разложения Γ-функции в бесконечное произведение

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)}{x(x+1)\ldots(x+n-1)} n^x.$$

(b) Формулу дополнения $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin \pi x}$.

4. Определение B-функции:

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-x)^{y-1} dt.$$

Докажите следующие тождества:

(a)

$$B(x,y) = 2\int_0^{\pi/2} (\sin\varphi)^{2x-1}(\cos\varphi)^{2y-1} d\varphi.$$

(b)

$$B(x+1,y) = \frac{x}{x+y} B(x,y).$$

(c)

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

5. Найдите значения следующих несобственных интегралов:

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^\alpha t\, dt.$ (b) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax^2} \cos x\, dx.$

(c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \cos x\, dx.$ (d) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2 - a^2/x^2}\, dx.$