Домашняя контрольная работа по матанализу (I курс)

Задание выдано 17.03.98. Решения подлежат сдаче 24.03.98

1. Пусть d — метрика на множестве E, удовлетворяющая условию
$$d(x,z) \leq \max(d(x,y), d(y,z))$$
для всех $x, y, z \in E$.

   Докажите, что

   (a) если $d(x,y) \neq d(y,z)$, то $d(x,z) = \max(d(x,y), d(y,z))$.

   (b) любой открытый шар $B(x,r) = \{y \in E \,|\, d(x,y) < r\}$ является одновременно открытым и замкнутым множеством.

   (c) $B(y,r) = B(x,r)$ для любой точки $y \in B(x,r)$.

   (d) если два шара имеют общую точку, то один из них содержится в другом.

   (e) Приведите пример метрики, удовлетворяющей данному условию (при этом постарайтесь, чтобы множество E было по возможности бесконечным, а функция D отлична от константы).

2. Можно ли следующие функции доопределить до функций, непрерывных в точке $(0,0)$:

   (a) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, если $(x,y) \neq (0,0)$?

   (b) $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, если $(x,y) \neq (0,0)$?

3. Найти все гладкие функции $f(x,y)$, удовлетворяющие уравнению
$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2+y^2}.$$

4. Пусть B — матрица билинейной формы $\varphi(x,y) = xBy$, где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор-строка, а $y \in \mathbb{R}^n$ — вектор-столбец. Рассмотрим φ как функцию $\varphi : \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Выразить матрицу Якоби функции φ в точке $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{2n}$ через матрицу B.

5. Непрерывная функция $\lambda(x,y,z)$ задана в окрестности точки $(0,0,0)$ условиями:

   1. $\lambda(0,0,0) = 1$,

   2. $\lambda(x,y,z)$ — собственное значение матрицы
$$\begin{pmatrix} 0 & z & y \\ z & 1 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}.$$

   Найи разложение функции $\lambda(x,y,z)$ в ряд Тейлора до второго порядка в точке $(0,0,0)$.

6. Дана функция $f(x,y) = (x^2+3y^2)e^{1-x^2-y^2}$. Найти все ее критические точки, указать их тип, нарисовать на плоскости картину линий уровня функции $f(x,y)$ и векторное поле ее градиента.

С. Дужин, С. Чмутов